Komplexe Potenzreihen

Wir werden im Rahmen der Diskussion der Taylorreihen folgende reelle Reihendarstellungen gewinnen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Wir können nun die reelle Variable x durch die komplexe Variable z ersetzen und erhalten damit die komplexe Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und es gilt etwa (durch Produktbildung der Potenzreihen)

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

Setzen wir nun $z = iy$ dann erhalten wir

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \dots =$$

$$= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots) =$$

$$= \cos y + i \sin y \qquad (\textbf{Eulersche Formel})$$

Liegt eine komplexe Zahl $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in Polardarstellung vor, dann gilt offenbar dass $z = re^{i\varphi}$.

Für $z = x + iy$ gilt $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Wir beobachten insbesondere dass

$$e^{i2n\pi} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{Z}$$

und damit gilt auch

$$e^z = e^z \cdot 1 = e^z e^{i2n\pi} = e^{z+i2n\pi} \ .$$

Die Funktion e^z ist also, im Gegensatz zu e^x , **nicht** injektiv.

Beispiel. $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Durch Auswerten von $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ erhalten wir sofort

$$\sin\varphi = \tfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \tfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \ .$$

Auf diese Weise können wir nun die komplexen Winkelfunktionen definieren mittels

$$\sin z = \tfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \ , \ \cos z = \tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \ , \ \tan z = \tfrac{\sin z}{\cos z} \ , \ \cot z = \tfrac{\cos z}{\sin z}$$

Übung. Man zeige unter Verwendung der Reihen für e^{iz} und e^{-iz} :

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} + \ldots \ \text{und}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} + \ldots$$

Beispiel. $\cos i = \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2} = 1,54308\ldots \in \mathbb{R}$

Verwenden wir $i = e^{i(2n\pi+\frac{\pi}{2})}$ dann erhalten wir eine Vieldeutigkeit für i^i durch

$$i^i = \left(e^{i(2n\pi+\frac{\pi}{2})}\right)^i = e^{i^2(2n\pi+\frac{\pi}{2})} = e^{-(2n\pi+\frac{\pi}{2})} \in \mathbb{R}$$

$$n=0 \ : \ 0,20788 \ , \quad n=1 \ : \ 0,00039 \ , \quad n=-1 \ : \ 111.32 \ \text{ etc.}$$

Bemerkung. Ist z rein imaginär, also etwa $z = iy$, dann ist $\sin iy$ ebenfalls rein imaginär und $\cos iy$ ist reell.

$$\sin iy = \tfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\tfrac{e^{y}-e^{-y}}{2} = i\sinh y$$

$$\cos iy = \tfrac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y$$

Bemerkung. Auch die Hyperbelfunktionen können für komplexe Argumente definiert werden (und wir erhalten auch die zu erwartenden Reihendarstellungen)

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ , \ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ , \ \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \ , \ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

Ist eine Gleichung $z = w^n$ gegeben, dann heißt jede komplexe Zahl w , welche die Gleichung löst, eine n-te **Wurzel** von z und man schreibt $w = z^{\frac{1}{n}}$.

Es ist zu erwarten, dass w **nicht** eindeutig bestimmt ist.

Sei $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2k\pi)}$. Dann ist

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Da die Winkelfunktionen periodisch sind, finden wir nur n verschiedene Werte

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

Diese Werte liegen auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$. Sie teilen den Kreis in n gleich große Sektoren mit Sektorwinkel $\frac{2\pi}{n}$.

Wir können den obigen Sachverhalt auch so interpretieren, dass bei der Umkehrung der Potenzfunktion Mehrdeutigkeiten auftreten.

Die Umkehrfunktion der reellen Funktion e^x ist der natürliche Logarithmus. Bei der Verallgemeinerung auf komplexe Argumente treten wiederum Vieldeutigkeiten auf.

Betrachten wir die Gleichung $z = e^w \ \ (z \neq 0)$. Wir setzen $w = \ln z$.

Sei $z = re^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $w = x + iy$.

Dann gilt $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = re^{i\varphi}$. Folglich ist $e^x = r$, i.e. $x = \ln r$, und $e^{iy} = e^{i\varphi}$, also $e^{i(y-\varphi)} = 1$ und damit $y - \varphi = 2k\pi$ bzw. $y = \varphi + 2k\pi$.

Damit erhalten wir

$$w = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = (\ln r + i\varphi) + 2k\pi i \quad , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Der Wert $\ln r + i\varphi$ heißt der **Hauptwert** von $\ln z$.

Beispiel. Sei $z = -1$. Dann ist $r = 1$ und $\varphi = \pi$.

Folglich ist $\ln z = \ln 1 + i\pi + i2k\pi = \pi i, -\pi i, 3\pi i, -3\pi i, \ldots$

Bemerkung. Bei allgemeinen Potenzen wird der Logarithmus benötigt, da diese in der Form $a^b = e^{b \ln a}$ geschrieben werden.

Bei der Umkehrung von Funktionen haben wir Ausdrücke $w = f(z)$ erhalten, die als mehrdeutige "Abbildungen" interpretiert werden können.

Es gibt allerdings eine Betrachtungsweise, welche eine Eindeutigkeit liefert. Dazu muss man sich - je nach Funktion - die komplexe Ebene in Form von mehreren, übereinander angeordneten Kopien vorstellen. Es sind dies die sogenannten **Riemannschen Blätter**. Die Gesamtheit der Riemannschen Blätter bildet dann eine so genannte **Riemannsche Fläche**.

Betrachten wir etwa $w^n = z = re^{i\varphi}$ bzw. $w = \sqrt[n]{z}$.

Es stellt sich nun heraus, dass jedem Sektor der w-Ebene mit Sektorwinkel $\frac{2\pi}{n}$ genau ein Punkt der z Ebene entspricht.

Man kann sich nun die z-Ebene aus mehreren Riemannschen Blättern aufgebaut denken, die einfach übereinandergelegte z-Ebenen sind. Jedes Blatt entspricht dabei einem Sektor der w-Ebene. Auf diese Weise entspricht jedem Punkt der w-Ebene genau ein Punkt der z-Ebene auf einem der Blätter.