Das Riemann Integral

1. Das Problem des Flächeninhalts

Ausgangspunkt für die Entwicklung des Integralbegriffs waren verschiedene Fragestellungen, u.a. das Problem der Messung des Flächeninhaltes eines krummlinig begrenzten Flächenstücks oder etwa auch die Bestimmung jener Arbeit, die eine veränderliche Kraft längs eines bestimmten Weges leistet.

Intuitiv erfolgt die Inhaltsmessung von (ebenen) Flächenstücken dadurch, dass wir abzählen, wieviele Maßeinheiten im Flächenstück "Platz haben". Für Rechtecke und weitere elementare Figuren ist dies problemlos, hingegen ist die Inhaltsmessung von Flächen unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$ nicht von vornherein klar.

Die Inhaltsmessung von (ebenen) Flächen soll folgende sinnvolle Eigenschaften besitzen :

- (**Eindeutigkeit**) Der Flächeninhalt F darf nicht von der Art der Bestimmung (Zerlegung in Rechtecke, Dreiecke etc.) abhängen.
- (**Monotonie**) Ist ein Flächenstück $\mathcal{F}_1$ in einem anderen Flächenstück $\mathcal{F}_2$ enthalten, dann gilt für die Inhalte $F_1 \leq F_2$.
- (**Additivität**) Überdecken sich $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ nicht, dann soll für die Vereinigung $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ gelten, dass $F = F_1 \cup F_2$.

Um dem Flächenstück unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$, $x \in [a, b]$ einen Inhalt zuzuordnen, wählen wir folgende Vorgangsweise :

(i) Zerlegung von $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle.

(ii) Über jedem Teilintervall wird ein Rechteck errichtet, welches gerade noch ganz **unter** dem Graphen von $f(x)$ liegt.

(iii) Analog werden Rechtecke errichtet, die gerade noch ganz **über** dem Graphen von $f(x)$ liegen.

(iv) Für gewisse Voraussetzungen für $f(x)$ wird nachgewiesen, dass die Differenz der Flächeninhalte bei den so definierten Treppenfunktionen beliebig klein gemacht werden kann, wenn das Intervall in hinreichend kleine Teilintervalle zerlegt wird.

Definition. Gegeben sei das Intervall $[a, b]$.

1) Eine **Partition** (Zerlegung) von $[a, b]$ ist eine Menge $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ von $n + 1$ Zahlen mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

2) $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$ heißt k-tes **Teilintervall**, und $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ die **Länge** von I_k .
(Beachte, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$)

3) Die Zahl $|P| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}$ heißt **Feinheitsmaß** von P .

Definition. Sei $f(x)$ **beschränkt** auf $[a, b]$, und $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$.

1) Wir setzen $m_k(f) = \inf\limits_{I_k} f(x)$, $M_k(f) = \sup\limits_{I_k} f(x)$, $m(f) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M(f) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

2) $\underline{S}_P(f) = \sum\limits_{P} m_k(f) \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(f) \Delta x_k$ heißt **Untersumme** von f bzgl. P .

3) $\overline{S}_P(f) = \sum\limits_{P} M_k(f) \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(f) \Delta x_k$ heißt **Obersumme** von f bzgl. P .

Eine Partition P liefert somit zwei Treppenfunktionen mit Flächeninhalten $\underline{S}_P(f)$ und $\overline{S}_P(f)$. Klarerweise gilt $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$.

Des weiteren gilt für jedes $k = 1, 2, ..., n$ offenbar, dass
$m(f) \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M(f)$.

Multiplikation jedes Terms mit Δx_k und Summation über alle k liefert die Aussage $m(f)(b-a) \leq \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f) \leq M(f)(b-a)$.

2. Eigenschaften von Ober- und Untersummen

Sei $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ und ein weiterer Unterteilungspunkt gegeben, etwa x_k^* mit $x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k$. Dadurch erhalten wir eine zusätzliche Partition $P' = \{x_0, .., x_{k-1}, x_k^*, x_k, .., x_n\}$.

Wegen $\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \geq \sup\limits_{[x_{k-1},x_k^*]} f(x)$, $\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \geq \sup\limits_{[x_k^*,x_k]} f(x)$ und

$\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \leq \inf\limits_{[x_{k-1},x_k^*]} f(x)$, $\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \leq \inf\limits_{[x_k^*,x_k]} f(x)$

gilt offenbar, dass $\overline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f)$ und $\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f)$.

D.h. die Obersumme wird kleiner, und die Untersumme wird größer.

Definition. Eine Partition $P' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$ heißt **Verfeinerung** von $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, wenn $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$.

(D.h. zu P kommen weitere Unterteilungspunkte hinzu.)

Durch sukzessive Anwendung der vorhergehenden Überlegung folgt dann unmittelbar

Satz. Sei P' eine Verfeinerung von P .

Dann gilt $\overline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f)$ und $\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f)$.

Dies bedeutet: Untersummen können bei Verfeinerung nicht kleiner werden, Obersummen können bei Verfeinerung nicht größer werden.

Satz. Seien P_1 und P_2 zwei beliebige Partitionen von $[a,b]$.

Dann gilt $\underline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f)$.

Beweis.

$P = P_1 \cup P_2$ ist eine gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2 . Mit den vorhergehenden Aussagen folgt dann, dass

$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f)$. $\square$

Folgerung. Werde eine Partition P' fest gewählt.

Dann gilt $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_{P'}(f)$ und $\overline{S}_P(f) \geq \underline{S}_{P'}(f)$ **für jede** Partition P .

Dies bedeutet aber, dass $\sup\limits_P \underline{S}_P(f)$ und $\inf\limits_P \overline{S}_P(f)$ existieren !!

3. Die Riemann-Darboux Integrale

Definition.

1) Das **untere Riemann-Darboux Integral** ist

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P \underline{S}_P(f) \ .$$

2) Das **obere Riemann-Darboux Integral** ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P \overline{S}_P(f) \ .$$

Satz. Stets gilt $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Beweis. Für zwei beliebige Partitionen gilt $\underline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f)$. Daraus folgt, dass $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}_{P_2}(f)$ und im nächsten Schritt dass $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$. $\square$

Bemerkung.
Aus der Definition der Riemann-Darboux Integrale als Supremum von Untersummen bzw. Infimum von Obersummen folgt natürlich :

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P$ mit $\underline{S}_P(f) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon$ und $\overline{S}_P(f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$.

Der folgende Satz (ohne Beweis) zeigt, dass es zu einem $\varepsilon > 0$ nicht nur eine derartige Partition gibt, sondern **alle** hinreichend kleinen Partitionen die entsprechenden Ungleichungen erfüllen.

Satz. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$, sodass **für alle** Partitionen P von $[a, b]$ mit $|P| < \delta_\varepsilon$ gilt:

(i) $\underline{S}_P(f) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon$,

(ii) $\overline{S}_P(f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$.

Nun zur "Additivität bzgl. des Integrationsintervalls".

Satz. Sei $a < c < b$. Dann gilt

1) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$,

2) $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$.

Beweis. (für obere Riemann-Darboux Integrale)

a) Sei P eine beliebige Partition von $[a, b]$ und P' die durch Hinzunahme von c erzeugte mögliche Verfeinerung von P . Dann gilt

$\overset{b}{\underset{a}{\overline{S}}}_P(f) \geq \overset{b}{\underset{a}{\overline{S}}}_{P'}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\overline{S}}}_{P'}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\overline{S}}}_{P'}(f) \geq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$, und damit

$\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$.

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, P_1$ von $[a, c]$ und $\exists\, P_2$ von $[c, b]$ mit

$\overline{S}_{P_1}(f) < \int\limits_a^c f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$ und $\overline{S}_{P_2}(f) < \int\limits_c^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$.

Für die Partition $P = P_1 \cup P_2$ von $[a,b]$ gilt dann

$\overline{S}_P{}_a^b(f) = \overline{S}_{P_1}{}_a^c(f) + \overline{S}_{P_2}{}_c^b(f) \leq \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx + \varepsilon$, woraus folgt

$\overline{\int\limits_a^b} f(x)dx \leq \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx + \varepsilon$.

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, muss daraus folgen, dass

$\overline{\int\limits_a^b} f(x)dx \leq \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, woraus sich mit a) die Behauptung ergibt. $\square$

Folgerung.
Ist $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$, dann gilt

(i) $\underline{\int\limits_a^b} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^n \underline{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)dx$,

(ii) $\overline{\int\limits_a^b} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^n \overline{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)dx$.

4. Das Riemann-Integral und seine Eigenschaften

Definition. Sei die Funktion f beschränkt auf $[a,b]$.

Stimmen die beiden Darboux-Integrale überein, dann heißt f **Riemann-integrierbar** auf $[a,b]$ (oder R-integierbar) . Der gemeinsame Wert heißt **Riemann-Integral** von f auf $[a,b]$ und wird mit $\int\limits_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Bemerkung. Ist $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$ R-integrierbar, dann fassen wir die Zahl $\int\limits_a^b f(x)dx$ als "Flächeninhalt unter der Kurve" auf.

Beispiele.

1) Sei $f(x) = h \ \forall\, x \in [a,b]$ (konstante Funktion).

Für jede Partition P von $[a,b]$ gilt dann $\underline{S}_P(f) = h(b-a)$ und $\overline{S}_P(f) = h(b-a)$. Klarerweise ist damit f R-integrierbar und es gilt $\int\limits_a^b f(x)dx = h(b-a)$.

Dies entspricht genau der Definition des Flächeninhalts eines Rechtecks mit Länge $(b-a)$ und Breite h .

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$

Für jede Partition P von $[a,b]$ gilt dann offenbar $\underline{S}_P(f) = 0$ und $\overline{S}_P(f) = 1$. Damit ist f **nicht** R-integrierbar.

Satz. (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) f ist R-integrierbar auf $[a,b]$,

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, P$ von $[a,b]$ mit $\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon$.

Mit Hilfe dieses Kriteriums kann nun sogar die Frage der R-Integrierbarkeit für ganze Funktionenklassen entschieden werden.

Satz. (ohne Beweis)

(i) Jede auf $[a,b]$ **monotone** Funktion ist dort R-integrierbar.

(ii) Jede auf $[a,b]$ **stetige** Funktion ist dort R-integrierbar.

Bislang betrachteten wir $\int\limits_a^b f(x)dx$, wobei $a < b$. Nun definieren wir zusätzlich das Integral über ein entartetes Intervall und über ein "entgegengesetzt orientiertes" Integral.

Definition. Sei $[a, b]$ gegeben mit $a \leq b$.

(i) Ist $a = b$ und $f(a)$ definiert, dann setzen wir $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

(ii) Ist f R-integrierbar auf $[a, b]$, dann setzen wir $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

Im folgenden werden (ohne Beweis) einige elementare Eigenschaften des Riemann-Integrals angeführt, welche relativ einfach aus den Eigenschaften der Riemann-Darboux Integrale und aus Betrachtungen der Ober- bzw. Untersummen hergeleitet werden können.

Satz. Seien f, g R-integrierbar auf $[a, b]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) (**Linearität** des R-Integrals)

$\lambda f + \mu g$ ist R-integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt $\int\limits_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx$.

(ii) (**Monotonie** des R-Integrals)

Ist $g(x) \leq f(x)$ auf $[a, b]$, dann gilt $\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx$.

(Folglich ist $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ falls $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$)

Für gewisse Überlegungen ist es vorteilhaft, dass nichtnegative Integranden vorliegen. Dies erreichen wir durch die Betrachtung des "positiven bzw. negativen Anteils" einer Funktion.

Definition. Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ definiert. Dann ist

(i) $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } f(x) < 0 \end{cases}$ der **positive Anteil** von f ,

(i) $f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{wenn } f(x) < 0 \end{cases}$ der **negative Anteil** von f .

Offenbar gilt $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ und $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Satz. Seien f, g R-integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt

(i) f^+, f^- sind R-integrierbar auf $[a, b]$,

(ii) $|f|$ ist R-integrierbar auf $[a, b]$ und $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$,

(iii) $f \cdot g$ ist R-integrierbar auf $[a, b]$.

Bezüglich möglicher Unterteilungen des Integrationsintervalls gelten folgende Aussagen.

1) Ist f R-integrierbar auf $[a, b]$, dann auch auf jedem Teilintervall $[c, d] \subseteq [a, b]$.

Sei f beschränkt auf $[a, b]$ und R-integrierbar auf jedem Intervall $[c, d] \subseteq (a, b)$. Dann ist f R-integrierbar auf $[a, b]$.

2) Sei $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$.

(i) Ist f R-integrierbar auf $[a, b]$, dann auch auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ und

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx ,$$

(ii) Ist f R-integrierbar auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$, dann auch auf $[a, b]$ und

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

3) Ist f R-integrierbar auf $[a, b]$ und $[a_n, b_n] \subseteq [a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x)dx \ .$$

Im besonderen haben damit die Werte von $f(a)$ und $f(b)$ keinen Einfluß auf die R-Integrierbarkeit und den Wert des Integrals.

Des weiteren kann $f(x)$ an **endlich vielen** Stellen abgeändert werden, ohne dass sich an der R-Integrierbarkeit und am Wert des Integral etwas ändert.