

# Doppel- und Dreifachintegrale

Sei  $[a, b]$  ein Intervall des  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  (also ein Rechteck bzw. ein Quader), i.e.

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \quad \text{oder} \quad [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] .$$

Für Intervalle des  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  (und analog für Intervalle des  $\mathbb{R}^n$ ) können ebenfalls Partitionen erklärt werden,

$$P[a, b] : \quad a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2 \quad \text{bzw.}$$

$$P[a, b] : \quad a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2 \\ a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = b_3$$

Im Zusammenhang damit erklären wir **Riemannsche Summen** bzgl. einer reellwertigen Funktion  $f$

$$S_P(f; \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad \text{bzw.}$$

$$S_P(f; \xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

wobei  $\xi, \eta, \zeta$  die Wahl von entsprechenden "Zwischenpunkten"  $\xi_i, \eta_j, \zeta_k$  bezeichnet.

**Definition.** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ). Dann heißt  $f$  **R-integrierbar** auf  $[a, b]$ , wenn jede "Zerlegungsnullfolge"  $P^{(n)}$  mit  $|P^{(n)}| \rightarrow 0$  gegen ein und denselben Wert konvergiert, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{P^{(n)}}(f; \xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I_2(f) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{P^{(n)}}(f; \xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \zeta^{(n)}) = I_3(f)$$

(unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte  $\xi, \eta, \zeta$ )

## Schreibweise.

$$I_2(f) = \iint_{[a,b]} f(x,y) dx dy = \iint_{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]} f(x,y) dx dy$$

$$I_3(f) = \iiint_{[a,b]} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]} f(x,y,z) dx dy dz$$

**Satz.** (ohne Beweis)

Falls  $f$  "stückweise stetig" auf  $[a, b]$  ist, dann ist  $f$   $R$ -integrierbar auf  $[a, b]$ .

**Bemerkung.** Dabei heißt  $f$  stückweise stetig, wenn  $f$  stetig in allen Punkten von  $[a, b]$  ist mit Ausnahme von Punkten einer Menge  $C$ , die als Vereinigung von endlich vielen Kurven (im  $\mathbb{R}^2$ ) bzw. als Vereinigung von endlich vielen Flächen (im  $\mathbb{R}^3$ ) darstellbar ist.

**Definition.**  $N \subseteq \mathbb{R}^2$  (bzw.  $N \subseteq \mathbb{R}^3$ ) heißt **Nullmenge**, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  endlich viele Rechtecke (bzw. Quader)  $A_n$  gibt, sodass

$$N \subseteq \bigcup_n A_n \quad \text{und} \quad \sum_n |A_n| < \varepsilon ,$$

wobei  $|A_n|$  den üblichen Flächeninhalt eines Rechtecks (bzw. Volumen eines Quaders) bezeichnet.

**Satz.** (ohne Beweis)

$f$  ist  $R$ -integrierbar auf  $[a, b] \Leftrightarrow f$  ist stetig auf  $[a, b]$  bis auf eine Nullmenge.

## Konkrete Berechnung von Doppel- und Dreifachintegralen

$$S_P(f; \xi, \eta) = \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) \sum_{i=1}^l f(\xi_i, \eta_j) (x_i - x_{i-1})$$
$$\sum_{i=1}^l f(\xi_i, y) (x_i - x_{i-1}) = \phi(y) = S_P(f; \xi) \xrightarrow{|P| \rightarrow 0} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx ,$$

wobei  $y$  ein Parameter ist. Daraus folgt

$\sum_{j=1}^m \phi(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^m \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, \eta_j) dx \right) (y_j - y_{j-1}) + \text{ein Rest, der mit } |P| \rightarrow 0 \text{ gegen Null strebt.}$

Insgesamt erhalten wir  $S_P(f; \xi, \eta) \xrightarrow{|P| \rightarrow 0} \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy .$

Hierfür verwendet man auch die Schreibweise

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

**Bemerkung.** Analoges gilt auch für Dreifachintegrale.

**Satz. (Fubini)**

Sei  $f$  auf  $[a, b]$  stückweise stetig und beschränkt. Dann existiert

$$\iint_{[a,b]} f(x, y) dx dy = \iint_{[a,b]} f(x, y) dA \quad \text{und es gilt}$$

$$\iint_{[a,b]} f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

**Bemerkung.** Analoges gilt auch für Dreifachintegrale. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Fubini ist also die "Reihenfolge der Integration" unwesentlich.

**Beispiel.** Man bestimme  $\iint_B \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dA$ , wobei  $B$  gegeben ist durch

$B : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 .$

$$\iint_B \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dA = \int_1^2 dy \int_0^1 \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dx = -2 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+y^2}} \Big|_{x=0}^1 dy =$$

$$= -2 \int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + 2 \int_1^2 \frac{dy}{y} = -2 \operatorname{arsinh} 2 + 2 \operatorname{arsinh} 1 + 2 \ln 2 .$$

Hier wäre  $\int_0^1 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y^2)^{3/2}}$  ungünstig gewesen!

Bislang sind wir lediglich in der Lage, über ein Intervall (Rechteck im  $\mathbb{R}^2$  bzw. Quader im  $\mathbb{R}^3$ ) zu integrieren. Durch Anwendung des Satzes von Fubini werden wir in der Lage sein, auch über allgemeinere Bereiche zu integrieren.

**Definition.**  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt **Normalbereich bzgl. der  $x$ -Achse**, wenn es zwei Zahlen  $a, b$  und zwei Funktionen  $f(x), g(x)$  gibt, sodass  $B$  beschrieben werden kann durch

$$B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\} .$$

Analog ist ein Normalbereich bzgl. der  $y$ -Achse beschrieben durch

$$B = \{(x, y) : f(y) \leq x \leq g(y), c \leq y \leq d\} .$$

**Definition.**  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt **Normalbereich bzgl. der  $xy$ -Ebene**, wenn es zwei Zahlen  $a, b$ , zwei Funktionen  $u(x), v(x)$  auf  $[a, b]$  sowie zwei Funktionen  $f(x, y), g(x, y)$  auf

$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$  gibt, sodass  $B$  darstellbar ist durch

$$B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x), f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\} .$$

Normalbereiche bzgl. der anderen Koordinatenebenen sind analog definiert.

**Bemerkung.**  $A$  stellt die Projektion von  $B$  auf die  $xy$ -Ebene (bzw. die jeweilige Koordinatenebene) dar.

Ein Normalbereich im engeren Sinne ist ein Normalbereich bzgl. beider Koordinatenachsen (im  $\mathbb{R}^2$ ) bzw. aller Koordinatenebenen (im  $\mathbb{R}^3$ ).

**Beispiel.** (i) Die Fläche des Einheitskreises im  $\mathbb{R}^2$  kann als Normalbereich dargestellt werden, nämlich durch

$$-1 \leq x \leq 1 \quad , \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq +\sqrt{1-x^2}$$

(ii) Die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten  $P_1(0, 0)$  ,  $P_2(2, 0)$  ,  $P_3(1, 3)$  kann als Normalbereich bzgl. der  $y$ -Achse dargestellt werden, nämlich durch

$$0 \leq y \leq 3 \quad , \quad \frac{y}{3} \leq x \leq 2 - \frac{y}{3}$$

**Frage.** Gegeben seien die Punkte  $P_1(0, 0)$  ,  $P_2(2, 1)$  ,  $P_3(1, 3)$  . Kann die dadurch definierte Dreiecksfläche als Normalbereich bzgl. der  $x$ -Achse bzw. der  $y$ -Achse dargestellt werden?

**Bemerkung.** Für das Integral über einen Normalbereich bzgl. der  $x$ -Achse gilt dann

$$\iint_B h(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy .$$

Für das Integral über einen Normalbereich bzgl. der  $xy$ -Ebene gilt

$$\iiint_B h(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B h(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} h(x, y, z) dz$$

Die Integrale über die anderen Normalbereiche sind analog definiert.

**Beispiel.** Sei das Ellipsoid  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$  gegeben.

Die Projektion in die  $xy$ -Ebene ist  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$  .

Also kann das Ellipsoid beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} -a &\leq x \leq a \\ -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} &\leq y \leq b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ -c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} &\leq z \leq c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

**Beispiel.** Man bestimme  $I = \iint_B xy dx dy$ , wobei  $B$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(2, 0)$ ,  $P_3(1, 3)$  ist.

Von vorher wissen wir, dass  $B$  durch  $0 \leq y \leq 3$ ,  $\frac{y}{3} \leq x \leq 2 - \frac{y}{3}$  beschrieben werden kann.

$$\begin{aligned} \text{Also ist } I &= \int_{y=0}^3 \left[ \int_{x=\frac{y}{3}}^{2-\frac{y}{3}} xy dx \right] dy = \int_{y=0}^3 \frac{x^2}{2} y \Big|_{\frac{y}{3}}^{2-\frac{y}{3}} dy = \\ &= \int_{y=0}^3 (2y - \frac{2}{3}y^2) dy = (y^2 - \frac{2}{9}y^3) \Big|_0^3 = 3 \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Ist ein vorliegender Bereich  $B$  kein Normalbereich, so lässt er sich oft in Normalbereiche  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zerlegen, wobei  $B_i \cap B_j$  nur jeweils Randpunkte enthält.

Für das Integral über  $B$  gilt dann eine entsprechende Additivitätseigenschaft.

**Bemerkung.** Ist  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  (bzw.  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ) ein Normalbereich, dann erhalten wir durch  $\iint_B dx dy$  (bzw.  $\iiint_B dx dy dz$ ) den **Flächeninhalt** von  $B$  (bzw. das **Volumen** von  $B$ ).

Dies gilt auch für Bereiche, die sich aus Normalbereichen zusammensetzen lassen.

## Eigenschaften von Mehrfachintegralen.

Im folgenden seien  $f$  bzw.  $g$  stets stückweise stetig, und der Bereich  $B$  stückweise glatt.

Mittels Riemannscher Summen kann man die Linearität, Additivität und Positivität nachweisen.

- **(Linearität)**  $\int \cdots \int_B [\lambda f(x_1, \dots, x_n) + \mu g(x_1, \dots, x_n)] dx_1 \cdots dx_n =$

$$= \lambda \int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \mu \int_B \cdots \int g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

• **(Additivität)** Sei  $B_1, \dots, B_m$  eine Zerlegung von  $B$ , wobei  $B_1 \cup \dots \cup B_m = B$  und  $B_i \cap B_j$  nur Randkomponenten von  $B_i$  bzw.  $B_j$  enthält.

$$\int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{B_1} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \dots + \int_{B_m} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

• **(Positivität)** Sei  $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  auf  $B$ .

Dann gilt  $\int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \geq 0$ .

**Folgerung.** Ist  $f \geq g$  auf  $B$ , dann ist

$$\int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \geq \int_B \cdots \int g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

(Beweis: Verwende  $h = f - g$ )

Weiters gilt die **Betragsungleichung**

$$\left| \int_B \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right| \leq \int_B \cdots \int |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \cdots dx_n$$

**Beweis.** Ist  $\int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \geq 0$ , dann gilt wegen  $f \leq |f|$

$$\left| \int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \right| = \int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \leq \int_B \cdots \int |f| dx_1 \cdots dx_n.$$

Ist  $\int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \leq 0$ , dann gilt wegen  $-f \leq |f|$

$$\begin{aligned} \left| \int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \right| &= - \int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \int_B \cdots \int (-f) dx_1 \cdots dx_n \leq \int_B \cdots \int |f| dx_1 \cdots dx_n. \quad \square \end{aligned}$$

**Satz. (Mittelwertsatz)**

Sei  $f$  stetig auf einem zusammenhängenden kompakten Bereich  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ . Dann existiert ein Punkt  $P(\xi, \eta, \zeta)$ , sodass

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \iiint_B f(x, y, z) dV, \text{ wobei}$$

$\text{Vol}(B) = \iiint_B 1 \cdot dV$  das Volumen von  $B$  bezeichnet.

**Beweis.** Weil  $f$  stetig auf der kompakten Menge  $B$  ist, werden das Maximum und das Minimum angenommen, d.h.  $\exists P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  sodass  $f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = m$ ,  $\exists P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  sodass  $f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = M$  und  $m \leq f(x, y, z) \leq M$  auf  $B$ .

Damit gilt

$$m \text{Vol}(B) = m \iiint_B 1 \cdot dV \leq \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M \iiint_B 1 \cdot dV = M \text{Vol}(B)$$

Folglich  $m \leq \mu(f) = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M$  ( $\mu(f)$  heißt auch der Mittelwert von  $f$ ).

Weil  $B$  zusammenhängend ist, gibt es einen Polygonzug, also eine stetige Kurve  $C : (x(t), y(t), z(t))$  mit Anfangspunkt  $P_0$  und Endpunkt  $P_1$ , welche ganz in  $B$  verläuft.

Betrachte nun die stetige Funktion  $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ . Nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen Minimum und Maximum von  $\varphi$  angenommen, d.h.  $\exists t^* : \varphi(t^*) = \mu(f)$ .

Der gesuchte Punkt ist dann  $P(\xi, \eta, \zeta) = P(x(t^*), y(t^*), z(t^*))$ .  $\square$

**Bemerkungen.**

(i) Im 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung wurde gezeigt, dass

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi), \quad a \leq \xi \leq b \quad \text{bzw.}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \text{Vol}(I) = b - a.$$

(ii) Der Mittelwertsatz gilt auch in analoger Weise für den  $\mathbb{R}^n$ .