Übungsblatt 03 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2013/14

(Heil, Riegelnegg, Ebner, Hörl, Schütky)

1. Untersuchen Sie folgende Folgen (a_n) auf Konvergenz

   (a) $a_n = \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

   (b) $a_n = (\frac{n-1}{n+1})^n$ (Man verwende $(1 + \frac{x}{n})^n \to e$ bzw. $(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1} \to e$)

   (c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{4k^2-1}$ (Stichwort: Teleskopreihe)

2. Begründen Sie, warum die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n}{n+1}$ divergent ist.

3. In statistischen Systemen ist die Zustandssumme eine zentrale Größe. Die sogenannte kanonische Zustandssumme ist dabei durch $Z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$ gegeben, wobei die "inverse Temperatur" $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ist. k_B ist die Boltzmann Konstante, T die Temperatur des Systems und E_n ist die Energie des n-ten Mikrozustandes.

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für einen quantenmechanischen, harmonischen Oszillator, dessen n-ter Zustand die Energie $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ hat, wobei $\hbar$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum bezeichnet, und ω die Kreisfrequenz des Oszillators.

4. Eine Oberfläche emittiert Strahlung I , deren Intensität proportional zur vierten Potenz ihrer absoluten Temperatur T ist ($I \propto \epsilon T^4$, wobei ϵ der Emissionskoeffizienten ist). Betrachten Sie nun zwei zueinander parallel stehende Oberflächen gleicher Fläche, wobei Oberfläche 1 die Temperatur T_1 habe und Oberfläche 2 die Temperatur T_2 . Weiters absorbiert Oberfläche 1 auf sie eintreffende Strahlung mit dem Faktor ϵ_1 (der Absorptionskoeffizient von Oberfläche 2 sei ϵ_2).

Berechnen Sie die Gesamtintensitäten I_{12} und I_{21} der von den Oberflächen absorbierten Strahlung (I_{12} sei die gesamte Strahlungsintensität, die von Oberfläche 1 emittiert wurde und von Oberfläche 2 absorbiert, I_{21} vice versa) und bestimmen Sie anschließend die Netto-Strahlungsbilanz $\Delta I = I_{12} - I_{21}$.

5. Bestimmen Sie eine konvergente Majorante zur Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(3k+1)^2}$.

6. Zeigen Sie mit dem Grenzwertkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}$ divergent ist.

7. Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\frac{1}{3} + \frac{1}{k})^k$ konvergiert.

8. Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3n!}{(2n)!}$ konvergiert.