Übungsblatt 05 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2013/14

(Heil, Riegelnegg, Ebner, Hörl, Schütky)

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2x} - \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} - 1}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

2. Mit Hilfe von $\frac{|a|}{\sqrt{4+a^2}} \leq 1$, $a \in \mathbb{R}$, zeige man, dass $\frac{|x+x_0|}{\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+x_0^2}} \leq 2 \quad \forall\ x_0, x \in \mathbb{R}$.

Daraus folgere man, dass $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, i.e. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ sodass $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

3. Sei $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Warum gibt es eine Stelle $x_0 \in [-1, 2]$ mit $f(x_0) = 4$?

4. Später wird gezeigt: ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) auf einem Intervall (a, b) dann ist $f(x)$ dort streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend) .

Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 5$ jene Intervalle, wo die Funktion streng monoton steigt (bzw. streng monoton fällt).

5. Man bestimme die Umkehrfunktion $x(y)$ zu

(a) $y(x) = \ln(1 + e^x) - x$ (b) $y(x) = \frac{x}{1+|x|}$

6. Man betrachte die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Bestimmen Sie die (punktweise) Grenzfunktion. Ist die Konvergenz der Funktionenfolge gleichmäßig?

7. Man betrachte die Funktionenfolge $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2x + 2n & \text{falls } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

Skizzieren Sie eine Funktion $f_n(x)$. Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge punktweise konvergiert oder gleichmäßig konvergiert. Bestimmen Sie $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

8. Zeigen Sie, dass $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, $-1 < x < 1$