

# Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit

Häufig tauchen in der Mathematik Ausdrücke der Form  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  auf. Derartigen Ausdrücken wollen wir jetzt eine präzise Bedeutung zuweisen.

**Definition.**  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  wenn für **jede (!)** Folge  $(x_n)$  mit der Eigenschaft  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow b$ .

Ist  $b \in \mathbb{R}$ , dann heißt  $b$  **eigentlicher Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0$** . Für  $b = +\infty$  bzw.  $b = -\infty$  spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

In dieser Definition sind auch die Möglichkeiten  $x_0 = +\infty$  bzw.  $x_0 = -\infty$  inkludiert und liefern  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Bemerkung.** Man beachte, dass bei dieser Definition die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  gar nicht definiert zu sein braucht.

## Beispiele.

1) Sei  $f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a}$ .  $f$  ist an der Stelle  $x_0 = a$  nicht definiert.

Sei nun  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$ . Dann ist

$$f(x_n) = \frac{x_n^m - a^m}{x_n - a} = \frac{(x_n - a)(x_n^{m-1} + x_n^{m-2}a + \dots + x_n a^{m-2} + a^{m-1})}{x_n - a} =$$

$$x_n^{m-1} + x_n^{m-2}a + \dots + x_n a^{m-2} + a^{m-1} \rightarrow ma^{m-1}.$$

Damit ist  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = ma^{m-1}$ .

2) Betrachte  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Dann ist  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Sei  $x_n = \frac{1}{n} \forall n$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow 0$  und  $f(x_n) = n \rightarrow +\infty$ .

Sei  $x_n = -\frac{1}{n} \forall n$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow 0$  und  $f(x_n) = -n \rightarrow -\infty$ .

Dies bedeutet, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  **nicht** existiert.

Man überlege sich andererseits, dass für jede Folge  $x_n \rightarrow +\infty$  (bzw.

$x_n \rightarrow -\infty$ ) gilt:  $f(x_n) \rightarrow 0$ , also  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

**Bemerkung.** (Annäherung entlang von **Richtungen**)

Für eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktionen gibt es nur zwei mögliche Annäherungen an einen Punkt  $x_0$  entlang von Richtungen, nämlich von links oder von rechts. Dementsprechend spricht man vom "linksseitigen Grenzwert" bzw. vom "rechtsseitigen Grenzwert".

**Definition.**

1)  $b = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  wenn für **jede** Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n < x_0$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow b$ .

$b$  heißt der **linksseitige Grenzwert** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

2)  $c = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  wenn für **jede** Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_0 < x_n$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow c$ .

$c$  heißt der **rechtsseitige Grenzwert** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

**Beispiel.** Betrachte  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ .

Dann ist  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ .

Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen (zwischen metrischen Räumen) ist die sogenannte "Stetigkeit". Dabei geht es um die Idee, dass wenn  $x$  "nahe bei"  $x_0$  ist, dann auch  $f(x)$  "nahe bei"  $f(x_0)$  sein soll. Dieser Idee wird nun eine genaue Bedeutung gegeben.

**Definition.** Seien  $(X, d)$  und  $(Y, \varrho)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.  $D(f) \subseteq X$  sei der Definitionsbereich von  $f$ .

i)  $f$  heißt **stetig in**  $x_0$  ( $x_0 \in D(f)$ ), wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  sodass  $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \varrho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$

ii)  $f$  heißt **stetig auf**  $X_0 \subseteq D(f)$ , wenn  $f$  stetig in allen Punkten  $x_0 \in X_0$  ist.

### Bemerkungen.

(i) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist somit genau dann stetig in  $x_0 \in D(f)$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein zugehöriges  $\delta_\varepsilon > 0$  gibt ( $\delta_\varepsilon$  hängt von  $\varepsilon$  und  $x_0$  ab!) sodass für alle  $x \in D(f)$  mit  $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon$  gilt, dass  $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ .

In anderen Worten: Wird ein beliebiges  $\varepsilon$ -Intervall um  $f(x_0)$  vorgegeben, dann existiert dazu ein  $\delta_\varepsilon$ -Intervall um  $x_0$ , welches zur Gänze in das  $\varepsilon$ -Intervall um  $f(x_0)$  abgebildet wird.

(ii) Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann stetig in  $z_0 \in D(f)$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein zugehöriges  $\delta_\varepsilon > 0$  gibt sodass für alle  $z \in D(f)$  mit  $|z_0 - z| < \delta_\varepsilon$  gilt, dass  $|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$ .

In anderen Worten: Wird eine beliebige  $\varepsilon$ -Kreisscheibe um  $f(z_0)$  vorgegeben, dann existiert dazu eine  $\delta_\varepsilon$ -Kreisscheibe um  $z_0$ , welche zur Gänze in die  $\varepsilon$ -Kreisscheibe um  $f(z_0)$  abgebildet wird.

Die Stetigkeit in einem Punkt  $x_0$  kann nun mittels konvergenter Folgen charakterisiert werden.

**Satz.** Seien  $(X, d)$  und  $(Y, \varrho)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $f$  ist stetig in  $x_0$ ,
- 2) für **jede** Folge mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt dass  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

### Beweis.

1)  $\Rightarrow$  2) : Gelte  $x_n \rightarrow x_0$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Laut Voraussetzung gibt es ein  $\delta_\varepsilon > 0$  mit  $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \varrho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ . Weil  $x_n \rightarrow x_0$  gibt es eine Zahl  $N_{\delta_\varepsilon}$  sodass  $d(x_0, x_n) < \delta_\varepsilon$  für  $n > N_{\delta_\varepsilon}$ .

Damit gilt aber  $\varrho(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$  für  $n > N_{\delta_\varepsilon}$ , i.e.  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

2)  $\Rightarrow$  1) : Annahme:  $f$  sei **nicht** stetig in  $x_0$ .

Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  sodass es für jedes  $\delta > 0$  einen Punkt  $x_\delta$  gibt mit  $d(x_0, x_\delta) < \delta$ , aber  $\varrho(f(x_0), f(x_\delta)) \geq \varepsilon$ .

Im besonderen (setze jeweils  $\delta = \frac{1}{n}$ ) gibt es damit eine Folge  $(x_n)$  mit  $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$  aber  $\varrho(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$ .

Damit gilt  $x_n \rightarrow x_0$  aber  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ , ein Widerspruch. Also ist  $f$  stetig in  $x_0$ .  $\square$

### Einfache Beispiele.

1) Die **konstante Funktion**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = a \quad \forall x$  ist stetig (also stetig in jedem  $x_0$ ).

2) Die **identische Funktion**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x \quad \forall x$  ist stetig (also stetig in jedem  $x_0$ ).

**Satz.** (Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig)

Seien  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen, wobei  $X, Y, Z$  metrische Räume sind und  $f(X) \subseteq D(g)$  gilt.

Ist dann  $f$  stetig in  $x_0 \in D(f)$  und  $g$  stetig in  $f(x_0)$ , dann ist  $g \circ f$  stetig in  $x_0$ .

### Beweis.

Gelte  $x_n \rightarrow x_0$ . Weil  $f$  stetig in  $x_0$  ist, gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Weil  $g$  stetig in  $f(x_0)$  ist, gilt dann weiters  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$ , also  $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Man kann zeigen:

1) Ist  $X$  ein metrischer Raum und sind  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , dann sind auch

$$f(x) \pm g(x) \quad , \quad f(x)g(x) \quad , \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{falls } g(x_0) \neq 0)$$

ebenfalls stetig in  $x_0$ .

2) Die in der LV "Einführung in die mathematischen Methoden" erwähnten

elementaren Funktionen (Polynome, Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen etc.) sind stetig.

### Beispiele.

a) Weil  $f(x) = g(x) = x$  stetig sind, so auch  $x \mapsto x^2$  (und mittels vollständiger Induktion) die Funktion  $x \mapsto x^n$ .

b) Weil  $x \mapsto e^x + 3$  und  $y \mapsto \sin y$  stetig sind, ist auch die Komposition, also  $x \mapsto \sin(e^x + 3)$  stetig.

### Eine Überlegung.

Wir betrachten  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$ . Wegen  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n^2 \rightarrow x_0^2$  ist  $f$  in allen  $x_0 \in \mathbb{R}$  stetig.

Zu  $\varepsilon > 0$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  gibt es also ein  $\delta_\varepsilon(x_0) > 0$  mit der Eigenschaft  $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon(x_0) \Rightarrow |x_0^2 - x^2| < \varepsilon$ .

Fixiert man  $\varepsilon$ , dann ist zu erwarten, dass  $\delta_\varepsilon(x_1)$  kleiner zu wählen ist, wenn  $|x_1| > |x_0|$ .

Die Frage ist nun, ob man ein "Universal- $\delta_\varepsilon$ " finden kann, welches für alle Punkte (bzw. für alle Punkte eines bestimmten Bereiches) das Gewünschte leistet. Dies führt zum Begriff der "gleichmäßigen Stetigkeit".

**Definition.** Sei  $f : X \rightarrow Y$ , wobei  $(X, d)$  und  $(Y, \varrho)$  metrische Räume sind.

Dann heißt  $f$  **gleichmäßig stetig** auf  $X_0 \subseteq D(f)$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein "Universal- $\delta_\varepsilon$ "  $\delta_\varepsilon > 0$  existiert sodass  $d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \varrho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ .

### Bemerkungen.

- 1) Man mache sich den Unterschied zwischen "Stetigkeit" und "gleichmäßiger Stetigkeit" klar !
- 2) Gleichmäßige Stetigkeit ist stets bezogen auf eine Teilmenge (und nicht

auf einen Punkt).

3) Klarerweise gilt :  $f$  gleichmäßig stetig auf  $X_0 \Rightarrow f$  stetig in jedem  $x_0 \in X_0$  .

**Aber:**  $f(x) = x^2$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  , aber dort nicht gleichmäßig stetig (Aufgabe).

Der folgende **sehr wichtige** Satz streicht die Bedeutung von kompakten Mengen hervor und wird eventuell zu einem späteren Zeitpunkt gezeigt.

**Satz.** Seien  $(X, d)$  und  $(Y, \rho)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig auf  $X_0 \subseteq D(f)$  .

1) Ist  $X_0$  kompakt, dann ist auch  $f(X_0)$  kompakt.

2) Ist  $X_0$  kompakt, dann ist  $f$  auch gleichmäßig stetig auf  $X_0$  .

**Bemerkung.**  $f(x) = x^2$  ist **nicht** gleichmäßig stetig auf  $X_0 = \mathbb{R}$  , aber gleichmäßig stetig auf z.B. einem kompakten Intervall  $X_0 = [a, b]$  .

Für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  kann nun auch die sogenannte "einseitige Stetigkeit" erklärt werden.

Dabei heißt  $f$  **linksseitig** (bzw. **rechtsseitig**) **stetig in**  $x_0$ , wenn gilt:

$\forall (x_n)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  und  $x_n \leq x_0$  gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  bzw.

$\forall (x_n)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  und  $x_n \geq x_0$  gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

**Bemerkung.** Offenbar ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  genau dann stetig in  $x_0$  , wenn  $f$  linksseitig und rechtsseitig stetig in  $x_0$  ist.

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $f(x) = 1$  für  $x > 0$  ist linksseitig stetig in  $x_0 = 0$  , aber nicht rechtsseitig stetig.

**Bemerkung.** Es gelte  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b$  .

Setzen wir nun den Funktionswert an der Stelle  $x_0$  durch  $f(x_0) = b$  fest, dann erhalten wir eine in  $x_0$  stetige Funktion. Man spricht hier auch von der **stetigen Erganzbarkeit**.

**Beispiel.** Die Funktion  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  ist an der Stelle  $x_0 = 2$  nicht definiert.

Offenbar gilt aber  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ . Wir können damit an der Stelle  $x_0 = 2$  den Funktionswert  $f(2) = 4$  setzen und erhalten eine in  $x_0 = 2$  stetige Funktion.

Für Funktionen lassen sich auch geeignete Beschranktheitsbegriffe erklären.

**Definition.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

1)  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $X_0 \subseteq D(f)$  **nach oben (bzw. nach unten) beschränkt**, wenn es eine Konstante  $M > 0$  gibt mit  $f(x) \leq M$  (bzw.  $f(x) \geq M$ ) für alle  $x \in X_0$ .

2)  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $X_0 \subseteq D(f)$  **beschränkt**, wenn  $f$  sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es eine Konstante  $M > 0$  gibt mit  $|f(x)| \leq M$  für alle  $x \in X_0$ .

3)  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt auf  $X_0 \subseteq D(f)$  **beschränkt**, wenn es eine Konstante  $M > 0$  gibt mit  $|f(x)| \leq M$  für alle  $x \in X_0$ .

**Bemerkungen.**

(i) Sind  $f, g$  beschränkt auf  $X_0$ , dann auch  $f \pm g$  und  $f \cdot g$ .

(ii) Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $X_0 \subseteq X$  beschränkt. Dann existieren  $\sup_{x \in X_0} f(x)$  und  $\inf_{x \in X_0} f(x)$ , müssen aber nicht auf  $X_0$  angenommen werden.

Betrachte etwa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$  und  $X_0 = (0, 1)$ . Dann ist  $\sup_{x \in X_0} f(x) = 1$  und  $\inf_{x \in X_0} f(x) = 0$ . Diese werden jedoch auf  $X_0$  nicht angenommen.

**Definition.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$  ein

- i) **absolutes Maximum auf  $X_0$** , wenn  $\forall x \in X_0 \quad f(x) \leq f(x_0)$ .
- ii) **absolutes Minimum auf  $X_0$** , wenn  $\forall x \in X_0 \quad f(x) \geq f(x_0)$ .
- iii)  $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$  heißt **Nullstelle** wenn  $f(x_0) = 0$ .

**Satz.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $X_0$ . Ist  $X_0$  **kompakt**, dann hat  $f$  auf  $X_0$  ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

**Beweis.** Laut vorherigem Satz ist  $f(X_0)$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , also beschränkt und abgeschlossen. Damit gilt  $\exists \sup_{x \in X_0} f(x)$ ,  $\inf_{x \in X_0} f(x)$  und  $\sup_{x \in X_0} f(x)$ ,  $\inf_{x \in X_0} f(x) \in f(X_0)$  (weil  $f(X_0)$  abgeschlossen ist).  $\square$

Häufig interessiert man sich allerdings lediglich für das lokale Verhalten von  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$ .

**Definition.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $x_0 \in X$ ,  $X_0 \subseteq X$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (i)  $U(x_0) \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x_0$ , wenn ein  $\delta > 0$  existiert mit  $K(x_0, \delta) \subseteq U(x_0)$ .
- (ii)  $f$  hat an der Stelle  $x_0$  ein **relatives Maximum auf  $X_0$** , wenn es eine Umgebung  $U(x_0)$  von  $x_0$  gibt mit  $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in X_0 \cap U(x_0)$
- (iii)  $f$  hat an der Stelle  $x_0$  ein **relatives Minimum auf  $X_0$** , wenn es eine Umgebung  $U(x_0)$  von  $x_0$  gibt mit  $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in X_0 \cap U(x_0)$

### Zwischenwerteigenschaften stetiger Funktionen.

Es scheint intuitiv klar zu sein, dass eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , bei der  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliches Vorzeichen besitzen, an einer Zwischenstelle des Intervalls eine Nullstelle haben muß. Dies ist allerdings nicht ganz trivial und beruht auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .



**Satz. (Nullstellensatz von Bolzano)**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig auf dem Intervall  $[a, b]$  und es gelte  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (d.h.  $f(a)$  und  $f(b)$  haben unterschiedliches Vorzeichen).

Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = 0$ , i.e.  $f$  hat in  $(a, b)$  mindestens eine Nullstelle.

**Beweis.** oBdA sei  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . Wir nehmen an, dass  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  und leiten daraus einen Widerspruch her.

Setze  $I_0 = [a, b]$ . Durch Halbierung von  $I_0$  erhalten wir zwei Teilintervalle  $[a, \frac{a+b}{2}]$  und  $[\frac{a+b}{2}, b]$ , von denen bei einem, etwa  $I_1 = [a_1, b_1]$ , gilt  $f(a_1) < 0$ ,  $f(b_1) > 0$  gilt.

Durch fortwährende Intervallhalbierung erhalten wir eine Folge  $I_n = [a_n, b_n]$  von Intervallen mit  $I_{n+1} \subseteq I_n$ ,  $f(a_n) < 0$ ,  $f(b_n) > 0$  und  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ .

Offenbar ist die Folge  $(a_n)$  monoton wachsend und nach oben beschränkt (durch  $b$ ),  $(b_n)$  ist monoton fallend und nach unten beschränkt (durch  $a$ ). Also sind beide Folgen konvergent. Man überlege sich, dass die Grenzwerte gleich sein müssen, i.e.  $\exists \xi \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$ .

Sei  $f(\xi) = \alpha > 0$  (analog wird der Fall  $f(\xi) < 0$  behandelt). Weil  $f$  stetig in  $x_0 = \xi$  ist, gibt es zu  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\alpha}{2}$  für alle  $|x - \xi| < \delta$ .

Wegen  $-\frac{\alpha}{2} < f(x) - f(\xi) < \frac{\alpha}{2}$  gilt  $f(x) > \frac{\alpha}{2}$  für alle  $|x - \xi| < \delta$ . Andererseits, weil  $a_n \rightarrow \xi$ ,  $\exists n$  mit  $|a_n - \xi| < \delta$ , und somit  $f(a_n) > \frac{\alpha}{2} > 0$ , ein Widerspruch.

Damit muß  $f(\xi) = 0$  sein.  $\square$

Dieser Satz läßt sich nun in einfacher Weise erweitern zum sogenannten Zwischenwertsatz.

**Satz. (Zwischenwertsatz)**

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für  $a < b \in \mathbb{R}$  gelte dass  $f(a) \neq f(b)$ , etwa  $f(a) < f(b)$  (analog wird der Fall  $f(a) > f(b)$  behandelt).

Dann gibt es für ein beliebiges  $\eta$  mit  $f(a) < \eta < f(b)$  ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \eta$ , d.h. jeder Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  wird angenommen.

**Beweis.** Sei  $g(x) = f(x) - \eta$ . Dann ist  $g$  stetig auf  $[a, b]$  mit  $g(a) < 0$  und  $g(b) > 0$ . Nach dem Nullstellensatz existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $g(\xi) = 0$ , i.e.  $f(\xi) = \eta$ .  $\square$

**Folgerung.** Das stetige Bild eines Intervalls ist wieder ein Intervall.

### Monotone Funktionen.

**Definition.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $X \subseteq D(f)$

i) **monoton wachsend** (bzw. streng monoton wachsend), wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2))$$

ii) **monoton fallend** (bzw. streng monoton fallend), wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2))$$

ii) **monoton** (bzw. streng monoton), wenn  $f$  entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

**Bemerkung.** Monotone Funktionen haben die Eigenschaft, dass stets linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert existieren, i.e. ist  $f$  auf dem Intervall  $(a, b)$  definiert und dort monoton, dann existieren  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  für jedes  $x_0 \in (a, b)$ .

Daraus folgt, dass monotone Funktionen als Unstetigkeitsstellen nur Sprungstellen haben können.

Die besondere Bedeutung monotoner Funktionen zeigt sich an der Frage der Existenz der Umkehrfunktion.

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  **streng** monoton. Dann ist  $f$  offenbar

injektiv. Bezeichnen wir mit  $B(f)$  den Bildbereich von  $f$ , dann ist  $f : A \rightarrow B(f)$  bijektiv.

Also existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B(f) \rightarrow A$ .

Sei etwa  $f$  streng monoton wachsend,  $y_1, y_2 \in B(f)$  mit  $y_1 < y_2$ . Wir setzen  $x_1 = f^{-1}(y_1)$  und  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ . Wäre  $x_1 \geq x_2$ , dann  $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ , also muß  $x_1 < x_2$  sein und somit ist  $f^{-1}$  ebenfalls streng monoton wachsend.

(Analog zeigt man, dass die Umkehrfunktion einer streng monoton fallenden Funktion wieder streng monoton fallend ist.)

**Satz.** Sei  $f$  stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend) auf  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

Ist  $X$  kompakt, dann ist  $f^{-1}$  stetig auf  $f(X)$ .

**Beweis.**

Sei  $y_0 \in f(X)$  und  $(y_n)$  eine Folge in  $f(X)$  mit  $y_n \rightarrow y_0$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte  $x_0, x_n \in X$  mit  $f(x_0) = y_0$  und  $f(x_n) = y_n$ , i.e.  $x_0 = f^{-1}(y_0)$  und  $x_n = f^{-1}(y_n)$ .

Annahme:  $(x_n)$  konvergiert **nicht** gegen  $x_0$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $|x_0 - x_{n_k}| \geq \varepsilon$ . Weil  $X$  kompakt ist, hat  $(x_{n_k})$  einen Häufungspunkt  $x \in X$  (Bolzano-Weierstrass). Also gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_{k_i}})$  von  $(x_{n_k})$  mit  $x_{n_{k_i}} \rightarrow x$ .

Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt, dass  $y_{n_{k_i}} = f(x_{n_{k_i}}) \rightarrow f(x)$ . Weil weiters  $y_{n_{k_i}} \rightarrow y_0$ , gilt  $y_0 = f(x)$  und damit  $x = x_0$ , ein Widerspruch.

Damit gilt  $x_n = f^{-1}(y_n) \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$ , i.e.  $f^{-1}$  ist stetig.  $\square$

**Bemerkung.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton. Dann ist  $B(f)$ , der Bildbereich von  $f$ , wieder ein offenes (!) Intervall.

Man kann zeigen, dass in diesem Fall die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B(f) \rightarrow (a, b)$  ebenfalls stetig ist.

## Folgen und Reihen von Funktionen.

Sehr häufig treten in der Mathematik Folgen bzw. Reihen von Funktionen auf. Ist etwa  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, dann können wir uns für ein festes  $x$  fragen, ob die entstandene Zahlenfolge  $(f_n(x))$  konvergiert oder nicht.

**Beispiel.** Für  $x \in \mathbb{R}$  sei  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . Man kann zeigen, dass für jedes feste  $x \in \mathbb{R}$  die entstandene Zahlenfolge gegen  $e^x$  konvergiert.

Ebenso kann gezeigt werden, dass für ein festes  $x \in \mathbb{R}$  die Zahlenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  die Summe  $e^x$  hat.

Eine Besonderheit von Funktionenfolgen bzw. -reihen ist, dass es dabei mehrere wichtige Konvergenzbegriffe gibt. Wir beschäftigen uns im folgenden mit der "punktweisen Konvergenz" und der "gleichmäßigen Konvergenz".

Sei nun eine Folge  $(f_n)$  von Funktionen gegeben, wobei jedes  $f_n$  auf der Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  (bzw.  $X \subseteq \mathbb{C}$ ) definiert ist. Für ein festes  $x \in X$  liegt dann eine Zahlenfolge vor, welche auf Konvergenz untersucht werden kann.

### Definition.

(i)  $(f_n)$  heißt **punktweise konvergent** an der Stelle  $x \in X$ , wenn die Zahlenfolge  $(f_n(x))$  konvergiert.

$X_K = \{x \in X : (f_n(x)) \text{ konvergiert}\}$  heißt dann die **Konvergenzmenge** der Folge  $(f_n)$ .

(ii) Die Funktion  $f$  mit Definitionsbereich  $X_K$  und  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  heißt die **Grenzfunktion** von  $(f_n)$ .

Die "Nachteile" der bloßen punktweisen Konvergenz werden an folgenden Beispielen ersichtlich.

### Beispiele.

1) Sei  $X = [0, 1]$  und  $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2 x^2}$ . Dann ist  $X_K = X$  und  $f(x) = \frac{1}{x}$  wenn  $0 < x \leq 1$  sowie  $f(x) = 0$  für  $x = 0$ .

D.h. die Grenzfunktion einer Folge von beschränkten Funktionen kann unbeschränkt sein, die Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen kann unstetig sein.

2) Sei  $X = [0, \infty)$  und  $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ . Dann ist  $X_K = X$  und  $f(x) = 0 \quad \forall x \in X_K$ .

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1$ , aber  $\int_0^{\infty} f(x) dx = 0$ .

D.h. Integration und Grenzwertbildung können im allgemeinen **nicht** vertauscht werden.

3) Sei  $X = \mathbb{R}$  und  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ . Dann ist  $X_K = X$  und es gilt  $f(x) = 0 \quad \forall x \in X_K$ .

Da die Folge der Ableitungen  $(f'_n(x)) = (\sqrt{n} \cos nx)$  für kein  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert, sind also Differentiation und Grenzwertbildung im allgemeinen ebenfalls **nicht** vertauschbar.

**Bemerkung.** Die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge  $(f_n)$  gegen  $f$  auf einer Menge  $X$  bedeutet, dass es zu jedem  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N_\varepsilon(x)$  gibt, sodass für alle  $n > N_\varepsilon(x)$  gilt, dass  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Die Frage, die sich nun stellt, ist: Kann ein von  $x$  unabhängiges  $N_\varepsilon$  gewählt werden. Es ist zu erwarten, dass dies von der betrachteten Menge  $X$  abhängt.

### Beispiel.

Sei  $X = (0, 1)$  und  $f_n(x) = x^n$ . Dann ist  $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$ .

Ist  $0 < \varepsilon < 1$  gegeben, dann erhalten wir für das zugehörige  $N_\varepsilon(x)$ :

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ . Der Ausdruck  $\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$  wird aber unbeschränkt für  $x \rightarrow 1$ .

Also kann es kein "universelles"  $N_\varepsilon$  auf  $(0, 1)$  geben.

Betrachten wir hingegen  $f_n(x) = x^n$  auf  $X = (0, \frac{1}{2})$  und setzen  $N_\varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$  für ein  $0 < \varepsilon < 1$ , dann gilt für alle  $n > N_\varepsilon$  und **für alle**  $x \in X$ , dass  $|f_n(x) - f(x)| = x^n < (\frac{1}{2})^n < \varepsilon$ .

$N_\varepsilon$  hängt hier also **nicht** von  $x$  ab.

**Definition.** Die Funktionenfolge  $(f_n)$  heißt **gleichmäßig konvergent gegen  $f$  auf  $X$** , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine (von  $x$  unabhängige) Zahl  $N_\varepsilon$  gibt, sodass für alle  $n > N_\varepsilon$  und alle  $x \in X$  gilt :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Schreibweise :  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$  oder  $f_n(x) \xrightarrow{glm} f(x)$ .

**Bemerkung.** Gleichmäßige Konvergenz bedeutet anschaulich, dass die Graphen von  $f_n(x)$  für alle  $n > N_\varepsilon$  in einem  $2\varepsilon$ -Streifen um den Graphen von  $f(x)$  liegen.

**Beispiel.** Sei  $X = [1, \infty)$  und  $f_n(x) = e^{-nx}$ . Dann ist  $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$ .

Wegen  $|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx} \leq e^{-n} < \varepsilon$  für  $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$  und  $0 < \varepsilon < 1$  gilt, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf  $X$  konvergiert.

Die nachstehende Aussage wird gelegentlich zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz verwendet.

**Satz. (Cauchy-Kriterium)** Folgende Aussagen sind gleichwertig :

1)  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$

2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon \quad \text{und} \quad \forall x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Die folgenden wichtigen Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz seien ohne Beweis angeführt :

**Satz.** Es gelte  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$ .

- 1) Sind alle  $f_n$  beschränkt auf  $X$ , dann auch  $f$ .
- 2) Sind alle  $f_n$  stetig auf  $X$ , dann auch  $f$ .
- 3) Ist  $X = [a, b]$  und jedes  $f_n$  Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$ , dann ist auch  $f$  Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

(D.h. Integration und Grenzwertbildung können vertauscht werden)

**Satz.** Seien die Funktionen  $f_n(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  differenzierbar. Für mindestens ein  $x_0 \in [a, b]$  sei  $(f_n(x_0))$  konvergent.

Des weiteren sei die Folge der Ableitungen  $(f'_n)$  gleichmäßig konvergent auf  $[a, b]$ . Dann gilt

- (i)  $(f_n)$  konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen eine Funktion  $f$ ,
- (ii)  $f$  ist auf  $[a, b]$  differenzierbar,
- (iii)  $\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$

Die Konvergenz einer Zahlenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  wurde bekanntlich auf die Konvergenz der zugehörigen Folge  $(s_n)$  der Partialsummen zurückgeführt, wobei  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Gilt  $s_n \rightarrow s$ , dann heißt  $s$  die Summe der Reihe und  $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Dieses Prinzip kommt auch bei der Betrachtung von Funktionenreihen zum Tragen. Sind Funktionen  $a_k(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gegeben, dann betrachten wir zu einer Funktionenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  die zugehörige Funktionenfolge der Partialsummen  $A_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$ .

Dementsprechend heißt eine Funktionenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **punktweise konvergent** an  $x \in X$ , wenn die Zahlenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  konvergiert, i.e. wenn  $(A_n(x))$  konvergiert.

Diejenigen  $x \in X$ , wo Konvergenz vorliegt, bilden wiederum die Konvergenzmenge  $X_K$ , und die auf  $X_K$  definierte Funktion  $A$  mit  $A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  heißt die **Summenfunktion** der Funktionenreihe.

Die Funktionenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt auf einer Menge  $X$  **gleichmäßig konvergent** zur Summenfunktion  $A$ , wenn  $A_n(x) \xrightarrow{X} A(x)$ .

Man verwendet dabei auch die Schreibweise  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \stackrel{X}{=} A(x)$ .

Die Anwendung des Cauchy-Kriteriums für Funktionenfolgen liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \stackrel{X}{=} A(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq m > N_\varepsilon \text{ und } \forall x \in X : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k(x) \right| < \varepsilon$$

Damit kann ein eminent wichtiges Kriterium bewiesen werden

**Satz. (Weierstrass)**

Besitzen die auf  $X$  definierten Funktionen  $a_k(x)$  dort die Abschätzung  $|a_k(x)| \leq c_k$  und konvergiert die Zahlenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , dann konvergiert

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  gleichmäßig auf  $X$ .

**Beweis.** Weil  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergiert und die Folge der Partialsummen damit eine Cauchy-Folge ist, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq m > N_\varepsilon : \sum_{k=m+1}^n c_k < \varepsilon .$$



Damit gilt aber für alle  $x \in X$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n c_k < \varepsilon . \quad \square$$

Aus den entsprechenden Aussagen über Funktionenfolgen ergeben sich analoge Aussagen über Funktionenreihen betreffend Stetigkeit der Summenfunktion sowie "gliedweise" Integration und Differentiation.

**Beispiel.** Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$  konvergiert nach dem Weierstrass-Kriterium auf  $[-q, q]$ ,  $q < 1$  gleichmäßig (weil  $|(-1)^k x^{2k}| \leq q^{2k}$ ) und hat dort die Summenfunktion  $\frac{1}{1+x^2}$ .

Mit  $\arctan t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^t \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) dx$  erhalten wir

$$\arctan t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} .$$