

Satz von Taylor, Taylor-Reihen

Die Kenntnis von f' liefert gewisse Rückschlüsse auf die Funktion f selbst, z.B. Monotonie, mögliche lokale Extrema.

Die Kenntnis von f'' liefert darüberhinaus eine Information, ob dieses Wachsen bzw. Fallen von f' zunimmt oder abnimmt.

Dies führt zur Überlegung, ob bei Kenntnis aller Ableitungen an einer Stelle x_0 die Funktion global oder zumindest auf einem Intervall rekonstruierbar ist.

Beispiel. Betrachte das Polynom $f(x) = x^3 - x^2 - 5$. f kann etwa auch in der Form

$$f(x) = (x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 + (x - 1) - 5 = \sum_{k=0}^3 a_k (x - x_0)^k$$

mit $x_0 = 1$ und $a_0 = -5$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ geschrieben werden.

Wir beobachten dabei, dass $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Betrachte nun ein beliebiges Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.

Unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes erhalten wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k [(x - x_0) + x_0]^k = \sum_{k=0}^n a_k \left\{ \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (x - x_0)^m x_0^{k-m} \right\} =$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m} (x - x_0)^m = \sum_{m=0}^n \left\{ \sum_{k=m}^n a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m} \right\} (x - x_0)^m =$$

$$\sum_{m=0}^n b_m (x - x_0)^m \quad \text{mit} \quad b_m = \sum_{k=m}^n a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m}.$$

Für $x = x_0$ folgt: $f(x_0) = b_0$ bzw. $b_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$.

k -faches Differenzieren von $f(x)$ liefert

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^n b_m m(m-1)\dots(m-k+1)(x-x_0)^{m-k}.$$

Für $x = x_0$ folgt dann $f^{(k)}(x_0) = b_k k!$ bzw. $b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Damit gilt: $f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m$.

In anderen Worten: $f(x)$ läßt sich durch Kenntnis von

$$f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0),$$

also aller Ableitungen an **einer** Stelle x_0 darstellen.

Satz. (Taylor)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar auf I und $x_0 \in I$. Dann gilt

$$1) \quad \forall x \in I \text{ ist } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x, x_0) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_n(x, x_0)$$

$$2) \quad \text{Für } R_n(x, x_0) \text{ gilt nach Lagrange } R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

wobei $x_0 < \xi < x$ bzw. $x < \xi < x_0$ oder in Standardschreibweise

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Bemerkung.

i) $T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ heißt **Taylorpolynom** (n -ter Ordnung)

ii) $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ heißt **Restglied nach Lagrange**

Beweis.

ObdA sei $x > x_0$, $x \dots$ fest. Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit $t \in [x_0, x]$ wobei $m = m(x, x_0)$ so gewählt wird, dass $g(x_0) = 0$.

Nachdem auch $g(x) = 0$ ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt, daher $\exists \xi \in (x_0, x)$ mit $g'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= 0 - f'(\xi) - f''(\xi)(x-\xi) + f'(\xi) - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + f''(\xi)(x-\xi) - \\ &\quad - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + m \frac{(x-\xi)^n}{n!} = \\ &\quad - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + m \frac{(x-\xi)^n}{n!} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $m = f^{(n+1)}(\xi)$. Setzen wir nun in $g(t)$ für $t = x_0$, so erhalten wir die Taylor-Formel. \square

Bemerkung. Der Satz von Taylor kann so interpretiert werden, dass eine (geeignet oft differenzierbare) Funktion $f(x)$ als Summe eines Polynoms $T_n(x, x_0)$ und eines Resttermes $R_n(x, x_0)$ geschrieben werden kann, $f(x) = T_n(x, x_0) + R_n(x, x_0)$.

Der Restterm $R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$ gibt an, wie gut die Funktion durch das Polynom approximiert wird.

Bemerkung. Approximieren wir $f(x)$ durch das Taylorpolynom 1. Ordnung, dann erhalten wir

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

wobei ξ ein Punkt zwischen x_0 und x ist.

Finden wir im betrachteten Bereich eine Schranke M für $|f''|$, dann wird die Güte der Approximation durch

$$|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))| \leq \frac{M}{2}|x - x_0|^2$$

gegeben.

Beispiel. Wir betrachten $f(x) = (1+x)^3$, $x_0 = 0$.

Dann ist $f'(x) = 3(1+x)^2$, $f''(x) = 6(1+x)$ und

$f(x) = 1 + 3x + R_1(x, 0)$.

Im Intervall $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ ist $|f''(x)| \leq 6,6$ und damit

$|R_1(x, 0)| \leq \frac{6,6}{2} \frac{1}{100} = 0,033$.

Bemerkung. Wenn f beliebig oft differenzierbar ist, dann gilt die Taylor-Formel für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das Taylor-Polynom

$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ für jedes feste $x \in I$ die n -te Teilsumme der unendlichen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

Dies ist die sogenannte zugeordnete **Taylor-Reihe** von f bzgl. des **Entwicklungspunktes** x_0 .

Da der Satz von Taylor nichts über die Konvergenz dieser Reihe aussagt, stellt sich die Frage, an welchen Stellen $x \in I$ die Reihe konvergiert und unter welchen Bedingungen die Summe der Reihe gleich $f(x)$ ist (d.h. die Taylor-Reihe die Funktion darstellt).

Aus der Taylor-Formel und der Definition der Konvergenz unendlicher Reihen folgt sofort

Satz. Sei f beliebig oft differenzierbar auf I .

Dann gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$ ist.

Bemerkung. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = a \neq 0$, dann konvergiert zwar die Taylor-Reihe, aber nicht gegen $f(x)$.

Beispiel. Betrachte $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \equiv 0$, d.h. die Taylor-Reihe stellt f nur an der Stelle $x = 0$ dar.

Gibt es auf dem Bereich $[x_0, x]$ bzw. $[x, x_0]$ allerdings eine gemeinsame Schranke für alle Ableitungen, dann wird $f(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt.

Satz. Sei f beliebig oft differenzierbar auf I . Wenn eine Konstante $K > 0$ (unabhängig von k) existiert mit $\max_{[x_0, x]} |f^{(k)}(\xi)| \leq K$ (bzw. $\max_{[x, x_0]} |f^{(k)}(\xi)| \leq K$), dann stellt die Taylor-Reihe die Funktion f an der Stelle x dar.

Beweis.

$$|R_n(x, x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq K \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(weil für jedes feste $a > 0$ die Folge $(\frac{a^n}{n!})$ gegen Null strebt.)

Wir bestimmen nun die Taylor-Reihen der elementaren Funktionen.

Satz. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. $f(x) = e^x$ ist beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} , und es gilt $f^{(k)}(x) = e^x$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \quad \forall k \geq 0$. Mit $x_0 = 0$ ist $T_n(x, x_0) = T_n(x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Für beliebiges und festes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\max_{[0, x]} |f^{(k)}(\xi)| = \max_{[0, x]} e^\xi = e^x$ bzw. $\max_{[x, 0]} |f^{(k)}(\xi)| = \max_{[x, 0]} e^\xi = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Damit wird die Funktion e^x in jedem $x \in \mathbb{R}$ durch ihre Taylor-Reihe dargestellt, i.e. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. \square

Satz. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ für alle $x \in (-1, 1]$.

Beweis. $f(x) = \ln(1+x)$ ist beliebig oft differenzierbar auf $(-1, \infty)$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k} \Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Mit $f(0) = 0$ gilt dann für $x \in (-1, \infty)$: $T_n(x, 0) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$.

Man kann zeigen, dass die Funktion durch ihre Taylor-Reihe auch dargestellt wird.

Offenbar gilt dass $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. \square

Betreffend der Taylor-Reihe für die Potenzfunktion $(1+x)^\alpha$ erwähnen wir zuerst, dass man zeigen kann, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1, 1)$ gilt, wobei

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Satz. $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ und $x \in (-1, 1)$.

Beweis. Die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ ist auf $(-1, \infty)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt dort für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \Rightarrow f(0) = 1, \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

Somit ist für alle $x \in (-1, \infty)$: $T_n(x, 0) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$.

Man kann zeigen, dass die Funktion durch ihre Taylor-Reihe auch dargestellt wird. \square

Satz. $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (für $\cosh x$)

$f(x) = \cosh x$ ist auf \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar und für alle $k \geq 0$ gilt $f^{(2k)}(x) = \cosh x$, $f^{(2k+1)}(x) = \sinh x$.

Somit ist für alle $x \in \mathbb{R}$ $T_n(x, 0) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Auf $I = [0, x]$ bzw. $I = [x, 0]$ gelten die Abschätzungen

$$f^{(2k)}(\xi) = \cosh \xi \Rightarrow \max_{\xi \in I} |f^{(2k)}(\xi)| = \cosh x,$$

$$f^{(2k+1)}(\xi) = \sinh \xi \Rightarrow \max_{\xi \in I} |f^{(2k+1)}(\xi)| = |\sinh x|.$$

Somit stellt die Taylor-Reihe die Funktion auf ganz \mathbb{R} dar. \square

Satz. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (für $\cos x$)

$f(x) = \cos x$ ist auf \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar und für alle $k \geq 0$ gilt $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin x$.

Somit ist $T_n(x, 0) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Wegen $|\cos x| \leq 1$ und $|\sin x| \leq 1$, mithin $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(2k)}(\xi)| \leq 1$ und $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(2k+1)}(\xi)| \leq 1$, stellt die Taylor-Reihe die Funktion auf ganz \mathbb{R} dar. \square