Implizite Funktionen

Motivation. Durch die Bedingung $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$ wird eine bestimmte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ festgelegt, z.B. durch $x - y = 4$.

Dabei können wir oBdA $C = 0$ annehmen, da wir stets zur Betrachtung von $\widetilde{F}(x,y) = F(x,y) - C$ übergehen können.

Bemerkung. Der Ausdruck $F(x,y) = 0$ kann auch so interpretiert werden, dass eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vorliegt, deren Nullstellen wir suchen. In manchen Zusammenhängen wird $F(x,y) = 0$ auch als (i.a. nichtlineare) Gleichung bezeichnet.

Die grundlegende Frage für uns ist nun, ob sich eine Funktion $y = f(x)$ bzw. $x = g(y)$ finden lässt, sodass sich die Punktmenge $F(x,y) = 0$ zumindest teilweise beschreiben läßt, wo also gilt

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in D(f) \quad \text{bzw.} \quad F(g(y), y) = 0 \quad \forall\, y \in D(g) \ .$$

Man sagt dann, dass man $F(x,y) = 0$ "nach y (bzw. nach x) auflösen" kann.

Einfache Beispiele zeigen, dass eine "globale Auflösung", d.h. wo die **gesamte** Punktmenge $F(x,y) = 0$ durch eine Funktion $f(x)$ bzw. $g(y)$ dargestellt werden kann, i.a. nicht zu erwarten ist.

Beispiel. Betrachte $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Dann wird durch $F(x,y) = 0$ der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ beschrieben.

Offenbar gilt hier $-1 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$. Zu jedem $x \in (-1,1)$ gibt es jedoch 2 Werte $y_1 = +\sqrt{1-x^2}$ und $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$ mit $F(x,y_1) = F(x,y_2) = 0$. Somit ist eine **globale** Auflösbarkeit nach y **nicht** möglich. Analog zeigt man, dass auch eine globale Auflösung nach x nicht möglich ist.

Betrachten wir nun einen Punkt $P(x_0, y_0)$ mit $F(x_0, y_0) = 0$.

Ist etwa $y_0 > 0$, dann gilt für die Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = +\sqrt{1-x^2}$, dass $F(x, f(x)) = 0 \ \forall\, x \in (-1,1)$ und $f(x_0) = y_0$.

D.h. in diesem Fall kann $F(x,y) = 0$ **lokal** nach y aufgelöst werden.

Ist $y_0 < 0$, dann leistet $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ das Gewünschte.

Ist $y_0 = 0$, dann gibt es **kein** offenes Intervall I um x_0 und **keine** auf I definierte Funktion $f(x)$ mit $F(x, f(x)) = 0 \;\; \forall\, x \in I$.

Analoges gilt für die Fälle $x_0 > 0$, $x_0 < 0$ und $x_0 = 0$.

Ist etwa $x_0 > 0$, dann gilt für die Funktion $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = +\sqrt{1-y^2}$, dass $F(g(y), y) = 0 \;\; \forall\, y \in (-1,1)$ und $g(y_0) = x_0$. D.h. eine Auflösung nach x ist möglich.

Definition. Gibt es eine auf einem offenen Intervall I definierte Funktion $f(x)$ (bzw. $g(y)$) , sodass $F(x, f(x)) = 0$ (bzw. $F(y, g(y)) = 0$) auf I gilt, dann heißt f (bzw. g) durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ **implizit definiert** .

Die wichtigste Aussage in diesem Zusammenhang wird durch den Hauptsatz über implizite Funktionen geliefert.

Satz. (**Hauptsatz über implizite Funktionen**)

Auf einer offenen Umgebung $U(x^0) \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x^0 \in \mathbb{R}^n$ seien Funktionen $f_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(\mu = 1, 2, ..., m)$ mit folgenden Eigenschaften erklärt :

(i) $f_\mu \in C^1(U(x^0))$, (ii) $f_\mu(x^0) = 0 \;\; \forall\, \mu$ und

(iii) $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0$ an x^0 .

Dann ist das Gleichungssystem

$$f_1(x) = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

$$f_2(x) = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(x) = f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

lokal nach $x_1, x_2, ..., x_m$ auflösbar, d.h. $\exists\, \delta > 0$ und es gibt m Funktionen in den $n - m$ Variablen $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$, i.e.

$$x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$$

$$x_2 = \varphi_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_m = \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \ ,$$

welche für $|x_\nu - x_\nu^0| < \delta \quad (\nu = m + 1, m + 2, ..., n)$ definiert und stetig differenzierbar sind, sodass identisch gilt

$$f_1(\varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n) = 0$$

$$f_2(\varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(\varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n) = 0 \ .$$

Bemerkung. Der Beweis des Satzes erfolgt entweder induktiv oder (zumeist) unter Verwendung des Fixpunktsatzes von Banach.

Bemerkung. Sind in (iii) nicht die Variablen $x_1, x_2, ..., x_m$ beteiligt, sondern ein anderes m-Tupel von Variablen, dann ist die Aussage über die Auflösbarkeit entsprechend zu modifizieren.

Bemerkung. Der Hauptsatz über implizite Funktionen gibt an, unter welchen Bedingungen eine lokale Auflösbarkeit möglich ist. Er liefert allerdings keine Methode, wie die konkrete Auflösung bewerkstelligt werden kann.

Beispiel. Sei $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Dann ist $F_y = 2y \neq 0$, falls $y \neq 0$.

Ist also $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ und $F(x_0, y_0) = 0$, dann gibt es eine auf einer Umgebung $U(x_0) \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion $y = \varphi(x)$

mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $F(x, \varphi(x)) = 0$ auf $U(x_0)$.

Beispiel. Sei $f_1(x, y, z) = x + y + z = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 - y^2 = 0$.

Dann ist etwa $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \neq 0$ für $x \neq 0$.

Wählt man also einen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mit $f_1(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f_2(x_0, y_0, z_0) = 0$ und $x_0 \neq 0$, dann existiert eine Umgebung $U(y_0) \subseteq \mathbb{R}$ von y_0 und es existieren stetig differenzierbare Funktionen $x = \varphi_1(y)$ und $z = \varphi_2(y)$ auf $U(y_0)$ mit

$$x_0 = \varphi_1(y_0) \quad , \quad z_0 = \varphi_2(y_0) \quad \text{und}$$

$$f_1(\varphi_1(y), y, \varphi_2(y)) = 0 \quad , \quad f_2(\varphi_1(y), y, \varphi_2(y)) = 0 \quad \text{auf} \ U(y_0) \ .$$

Bemerkung. (**Implizites Differenzieren**)

(i) Sei $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ und $F(x, y_1, ..., y_n) = 0$ sei auflösbar nach den Variablen $y_1, ...y_n$. D.h. es existieren Funktionen $y_1(x), ..., y_n(x)$ mit $F(x, y_1(x), ...y_n(x)) = 0$.

Anwendung der Kettenregel liefert dann

$$F_x + F_{y_1} y_1' + ... + F_{y_n} y_n' = 0 \ .$$

(ii) Sei beispielsweise $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Für $y \neq 0$ besteht wegen $F_y = 2y$ Auflösbarkeit nach y , also existiert eine Funktion $y(x)$ mit $F(x, y(x)) = 0$.

Mit der Kettenregel erhalten wir $F_x + F_y y' = 0$ bzw. $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$.

(iii) Sei für $y(x)$ der Ausdruck $y^2 y' + 3 = 0$ gegeben. Implizites Differenzieren liefert dann mit der Produktregel

$$2y(y')^2 + y^2 y'' = 0 \ .$$

Der Hauptsatz über implizite Funktionen kann auch herangezogen werden, um eine sehr wichtige Aussage über die lokale Umkehrbarkeit einer Funktion zu gewinnen.

Satz. (**Satz über die Umkehrfunktion**)

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei auf einer offenen Umgebung $U(x^0) \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x^0 \in \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar (d.h. alle Koordinatenfunktionen sind stetig differenzierbar).

Es gelte weiters $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{in} \quad x^0$.

Dann existiert eine offene Umgebung $\widetilde{U}(x^0) \subseteq U(x^0)$, welche durch f **bijektiv** auf eine offene Umgebung $\widetilde{V}(y^0)$ abgebildet wird, wobei $y^0 = f(x^0)$.

D.h. es existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : \widetilde{V}(y^0) \to \widetilde{U}(x^0)$, und diese ist stetig differenzierbar.

Des weiteren ist $J_{f^{-1}}(y) = \big(J_f(f^{-1}(y))\big)^{-1}$ für $y \in \widetilde{V}(y^0)$.

Beweis. Betrachte $F(x, y) = f(x) - y = 0$. Dies stellt ein Gleichungssystem im $\mathbb{R}^{2n}$ dar.

$$F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = f_1(x_1, ..., x_n) - y_1$$

$$F_2(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = f_2(x_1, ..., x_n) - y_2$$

$$\vdots$$

$$F_n(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = f_n(x_1, ..., x_n) - y_n$$

Laut Voraussetzung gilt $F(x^0, y^0) = 0$ und $F(x, y)$ ist stetig differenzierbar auf einer Umgebung von (x^0, y^0) .

Wegen $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{in} \quad x^0$

läßt sich das Gleichungssystem $F(x, y) = 0$ lokal nach x auflösen, d.h. es existiert eine offene Umgebung $\widetilde{V}(y^0)$ von y^0 und eine stetig differenzierbare Funktion g auf $\widetilde{V}(y^0)$ mit $x = g(y)$ auf $\widetilde{V}(y^0)$ und $y = f(g(y))$. Dies bedeutet aber, dass $g = f^{-1}$.

Mit der Kettenregel und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ folgt sofort dass

$$J_{f^{-1}}(y) = \big(J_f(f^{-1}(y))\big)^{-1} \quad \text{für} \quad y \in \widetilde{V}(y^0) \ . \qquad \square$$

Beispiel. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1^2 \quad , \quad y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \ .$$

Dann ist $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x_1$.

Sei nun $x^0 \in \mathbb{R}^2$ fest mit $x_1 \neq 0$, d.h. x^0 liegt entweder in der linken oder in der rechten Halbebene.

(a) Gelte $x_1 > 0$. Dann ist die Umkehrabbildung gegeben durch

$$x_1 = +\sqrt{y_1} \quad , \quad x_2 = y_2 - \sqrt{y_1} \ .$$

Der Definitionsbereich dieser Abbildung ist der Bereich $y_1 > 0$, der Bildbereich ist der Bereich $x_1 > 0$.

(b) Gelte $x_1 < 0$. Dann ist die Umkehrabbildung gegeben durch

$$x_1 = -\sqrt{y_1} \quad , \quad x_2 = y_2 + \sqrt{y_1} \ .$$

Der Definitionsbereich dieser Abbildung ist der Bereich $y_1 > 0$, der Bildbereich ist der Bereich $x_1 < 0$.