

Übungsblatt 01 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2015/16

(Grabenwarter, Knebl, Mian, Pötz, Ranftl, Weissitsch)

1. Nach einem Mordfall gibt es drei Verdächtige, A, B und C, von denen zumindest einer der Täter sein muss. Nachdem sie und die Zeugen getrennt vernommen wurden, kennen die Ermittler folgende Fakten:

- (a) Wenn A Täter ist, dann müssen B oder C ebenfalls Täter sein.
- (b) Wenn B Täter ist, dann ist A unschuldig.
- (c) Wenn C Täter ist, dann ist auch B Täter.

Lässt sich damit genau herausfinden, wer von den dreien schuldig bzw. unschuldig ist?

2. An einer Weggabelung in der Wüste leben zwei Brüder, von denen einer immer die Wahrheit sagt, und der andere immer lügt (es ist allerdings nicht bekannt, welcher die Wahrheit sagt und welcher lügt). Schon halb verdurstet kommt man zu dieser Weggabelung und weiß genau: Einer der beiden Wege führt zu einer Oase, der andere hingegen immer tiefer in die Wüste hinein. Man darf nun nur einem der beiden Brüder eine einzige Frage stellen. Was muss man fragen, um sicher den Weg zur Oase zu finden?

(Hinweis: Versuchen Sie eine Frage zu konstruieren, auf die jeder der beiden Brüder gleich antworten muss.)

3. Man beweise, dass die Mengen $A = \{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$ und $B = \{\frac{2}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$ beschränkt sind.

4. Mittels der Dreiecksungleichung $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ beweise man, dass $||x| - |y|| \leq |x - y|$ gilt, i.e. dass $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$.

5. Seien G_1, G_2, \dots, G_n offene Mengen in einem metrischen Raum (X, d) . Man zeige, dass auch $G = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$ eine offene Menge ist.

6. Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Ausdrücke und vereinfachen Sie sie anschließend.

(a) $\frac{x}{x^2-4a^2} + \frac{2a}{x^2-4a^2}$, $a \in \mathbb{R}$ (b) $\frac{|x^8-16x^4|}{x^4|x^2-4|}$

7. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge folgender Gleichung

$$\frac{|x+1|}{x^2+1} = \frac{|x|}{x^2} .$$

8. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die $x^2 - 6x + 5 < 0$ gilt.

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x - 2| - 2x \geq 11$.

10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x - 2| + |x + 3| \geq 5$.