Übungsblatt 02 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2015/16

(Grabenwarter, Knebl, Mian, Pötz, Ranftl, Weissitsch)

11. Ein Schwimmbecken vom Volumen V kann mit 3 Pumpen A, B, C gefüllt werden. A benötigt allein 2400 Minuten, B allein 1500 Minuten und C allein 4000 Minuten. Wie lange dauert eine Füllung des Schwimmbeckens, wenn alle 3 Pumpen gleichzeitig arbeiten? (Betrachten Sie dazu die einzelnen Füllraten (Volumen pro Zeit). Die Gesamtfüllrate ist dann die Summe der Einzelfüllraten.)

12. Gegeben sei die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \geq 2$. Zu $\varepsilon = \frac{1}{100}$ bestimme man eine Zahl N_ε sodass $|x_n - 1| < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$.

13. Bestimmen Sie eine Schranke M und eine Zahl N sodass $a_n \leq M$ gilt für $n \geq N$, wobei $a_n = \frac{n^2+7n+1}{2n^2+5n-3}$.

14. Sei $a > 0$ eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie zuerst für $a > 1$ mittels des Einschliessungskriteriums und der Tatsache $\sqrt[n]{n} \to 1$, dass auch $\sqrt[n]{a} \to 1$ gilt. Zeigen Sie anschliessend, dass $\sqrt[n]{a} \to 1$ auch für $0 < a < 1$ gilt.

15. Bestimmen Sie den Grenzwert von $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ mit dem Einschliessungskriterium.

16. Bestimmen Sie den Grenzwert von $a_n = (\frac{n^2-1}{n^2})^{n^2}$. Verwenden Sie dabei die Formel $e^x = \lim\limits_{m\to\infty} (1 + \frac{x}{m})^m$.

17. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$. Zeigen Sie, dass die Folge monoton steigt und beschränkt ist. Bestimmen Sie den Grenzwert von a_n .

18. Untersuchen Sie folgende Folgen (a_n) auf Konvergenz

(a) $a_n = \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{4k^2-1}$ (Stichwort: Teleskopreihe)

19. Begründen Sie, warum die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n}{n+1}$ divergent ist.