Übungsblatt 03 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2015/16

(Grabenwarter, Knebl, Mian, Pötz, Ranftl, Weissitsch)

20. Eine Gruppe von Freunden möchte eine Adventfeier veranstalten und kauft dafür 5 Liter Glühwein. Die 0.2-Liter-Becher stehen bereit, und es wird rundenweise getrunken. Die Freunde sind aber vorsichtig, daher trinken sie nur bei der 1. Runde einen ganzen Becher, in der 2. Runde nur noch einen halben, danach einen viertel Becher, usw.
Wie groß muss die Gruppe mindestens sein, damit alle 5 Liter Glühwein verbraucht werden? Wie viele Runden müssen bei dieser minimalen Zahl von Freunden getrunken werden?

21. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^2 - 4)^n$?

22. Bestimmen Sie eine konvergente Majorante zur Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(3k+1)^2}$.

23. Zeigen Sie mit dem Grenzwertkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}$ divergent ist.

24. Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\frac{1}{3} + \frac{1}{k})^k$ konvergiert.

25. Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3n!}{(2n)!}$ konvergiert.

26. Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2\left[\pi(n + \frac{4}{n})\right]$ auf Konvergenz. Verwenden Sie dabei das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ sowie die Tatsache, dass $\sin x \leq x$ für $x \geq 0$ ist zur Bestimmung einer konvergenten Majorante.

27. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ zwar konvergiert, aber das Cauchy-Produkt mit sich selbst divergiert.

(Ist $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, dann ist das Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k$. Zeigen Sie nun, dass $|a_{n-k}| \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ und $|a_k| \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ist und dass folglich (c_n) keine Nullfolge sein kann.)