Übungsblatt 04 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2015/16

(Grabenwarter, Knebl, Mian, Pötz, Ranftl, Weissitsch)

28. Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

29. Man untersuche, ob die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 + e^{x-1} & \text{wenn } x > 1 \\ \sqrt{2-x} + 3x^2 & \text{wenn } x \leq 1 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

30. Man betrachte die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Zeigen Sie, dass es für jeden Wert $y \in [-1, +1]$ eine Folge (x_n) gibt mit $x_n \to 0$ und $f(x_n) \to y$. Kann $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ergänzt werden? Skizzieren Sie die Funktion.

31. Man betrachte $f(x) = \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ und prüfen Sie, ob an den Stellen $\xi = -2$ bzw. $\xi = +2$ eine stetige Ergänzung möglich ist.

32. Nach einem Satz in der Vorlesung ist die Funktion $f(x) = x^2$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ jedoch **nicht** gleichmäßig stetig ist, i.e. führen Sie die Annahme, $f(x)$ wäre auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, zu einem Widerspruch.
(Zu $\varepsilon = 1$ gäbe es ein $0 < \delta < 1$ mit $|x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |x_1^2 - x_2^2| < 1$ etc.)

33. Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4x + 2$ eine Umkehrfunktion? Geben Sie einen Bereich an, wo die Funktion umkehrbar ist.

34. Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ mit $y = f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ umkehrbar ist (d.h. man kann x eindeutig aus y bestimmen), und gebe die Umkehrfunktion an.

35. Ein Fußgänger geht am Vormittag in drei Stunden vom Ort A zum Ort B . Dort macht er eine Mittagspause, um am Nachmittag in derselben Zeit wie auf dem Hinweg den Rückweg zurückzulegen. Gibt es einen Ort auf der Strecke, den er sowohl auf dem Hin- als auch auf dem Rückweg nach derselben Zeit erreicht?

(Hinweis: Die benötigte Zeitspanne normiere man zu 1, ebenso die Strecke von A nach B . Für den Hinweg gibt es dann eine stetige Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$, welche einem Zeitpunkt die entsprechende Position zuordnet. Für den Rückweg gibt es eine ensprechende Funktion $r : [0,1] \to [0,1]$. Betrachten Sie die Differenzfunktion $f(x) = h(x) - r(x)$.)