Übungsblatt 05 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2015/16

(Grabenwarter, Knebl, Mian, Pötz, Ranftl, Weissitsch)

36. Mit Hilfe von $\frac{|a|}{\sqrt{4+a^2}} \leq 1$, $a \in \mathbb{R}$, zeige man, dass $\frac{|x+x_0|}{\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+x_0^2}} \leq 2 \quad \forall\, x_0, x \in \mathbb{R}$.

Daraus folgere man, dass $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, i.e. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ sodass $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

37. Man bestimme die Umkehrfunktion $x(y)$ zu

(a) $y(x) = \ln(1 + e^x) - x$ (b) $y(x) = \frac{x}{1+|x|}$

38. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2x} - \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} - 1}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

39. Man betrachte die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Bestimmen Sie die (punktweise) Grenzfunktion. Ist die Konvergenz der Funktionenfolge gleichmäßig?

40. Man betrachte die Funktionenfolge $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2x + 2n & \text{falls } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{falls } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

Skizzieren Sie eine Funktion $f_n(x)$. Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge punktweise konvergiert oder gleichmäßig konvergiert. Bestimmen Sie $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

41. Zeigen Sie, dass $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, $-1 < x < 1$

42. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{n^2}(x-1)^n$ und gebe das (offene) Konvergenzintervall an.

(Hinweis: Man überlege, dass $\frac{n}{3^n} \to 0$)

43. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^4}{(4k)!} x^k$.

44. Unter Verwendung von geometrischen Reihen bestimme man die Potenzreihendarstellung von $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2-x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sowie den Konvergenzradius.