Übungsblatt 06 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2015/16

(Grabenwarter, Knebl, Mian, Pötz, Ranftl, Weissitsch)

45. Man bestimme den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n^2+in}(z-2i)^n$ und untersuche die Konvergenz auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe.

(Der entstehende Grenzwert bei der Bestimmung des Konvergenzradius kann eventuell mit der Regel von de l'Hospital berechnet werden).

46. Man berechne die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \cos(x^2)\cos^2 x$, (b) $f(x) = \ln(\frac{e^x-1}{e^x})$, $f(x) = x^{(x^x)}$, $x > 0$

(Man beachte, dass $x^x = e^{x \ln x}$ und $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x}$)

47. Man zeige durch Untersuchung von Extrema, dass $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$ für $x > 0$. Man ermittle dabei auch $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$.

48. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = |1 - e^x|$ differenzierbar?

49. Beweisen Sie die Ungleichung $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ für $x > 0$ unter Verwendung des 1. Mittelwertsatzes für die Funktion $f(t) = \arctan t$.

50. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass

(a) $(\mathrm{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und (b) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

51. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x+2}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x})$