Übungsblatt 07 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2015/16

(Grabenwarter, Knebl, Mian, Pötz, Ranftl, Weissitsch)

52. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = (\frac{n-3}{n+2})^n$ mit der Regel von de l'Hospital.

53. Man ermittle das Taylor-Polynom $T_3(x,1)$ (Entwicklungspunkt ist also $x_0 = 1$) von der Funktion $f(x) = \ln(1+3x^2)$.

54. Die Funktion $y = y(x)$ sei (implizit) durch den Ausdruck $y = -xe^y + y^2$ mit $y(0) > 0$ gegeben. Man differenziere den Ausdruck nach x (Kettenregel!) und bestimme $y'(0)$.

55. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 5-ter Ordnung von $f(x) = \tan x$ mit $x_0 = 0$. Verwenden Sie dabei für $y = \tan x$ die Formel $y' = 1 + y^2$.

56. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_1(x,0)$ von $f(x) = \sin 2x + \cos x$ und schätzen Sie den Fehler im Bereich $|x| < 10^{-2}$ ab. (Restgliedabschätzung)

57. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich, den Bildbereich und das Monotonieverhalten. Berechnen Sie weiters $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$ und $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)$.

58. Für die Funktion $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$ bestimme man den Definitionsbereich sowie jene Bereiche, auf denen $f(x)$ konvex bzw. konkav ist.

59. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f stetig? Was ist der Richtungsgrenzwert von f entlang der y-Achse bei Annäherung an $(0,0)$? Was ist der Richtungsgrenzwert von f entlang der Geraden $y = kx$ bei Annäherung an $(0,0)$? Zeigen Sie, dass dabei jeder Wert aus $[-1,1]$ auftreten kann.

60. Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle $(0,0)$.

Verwenden Sie dabei $f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}f_0(x,y)$ und zeigen Sie, dass $f_0(x,y)$ **nicht** gegen Null strebt, wenn $(x,y) \to (0,0)$. Betrachten Sie dazu Annäherungen entlang der y-Achse und entlang der Geraden $y = -x$.

61. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = \cos(xy) - \sin(x+y)$ im Ursprung in Richtung $\frac{\pi}{4}$.