Ordinalzahlen

Im Rahmen der Ordnungsrelationen wurden bisher die Begriffe Partialordnung und Totalordnung (lineare Ordnung) erwähnt. Ein weiterer wichtiger Ordnungsbegriff ist die **Wohlordnung**. Wohlgeordnete Mengen bilden die Grundlage zur Definition der Ordinalzahlen, welche die von den natürlichen Zahlen her bekannte Eigenschaft des "um 1 Weiterzählens" verallgemeinern. Zugleich werden Ordinalzahlen den Ordnungstyp von wohlgeordneten Mengen beschreiben.

Definition. Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge und $a \in X$. Dann heißt

$$X_a = \{x \in X \ : \ x < a\}$$

der durch $a \in X$ bestimmte **(Anfangs)Abschnitt**.

Bemerkung. Hat $(X, \leq)$ ein kleinstes Element a , dann ist offenbar $X_a = \emptyset$.

Definition. Eine **Wohlordnung** " $\leq$ " auf X ist eine Totalordnung, wo jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, d.h.

$$\forall \, \emptyset \neq A \subseteq X \ \ \exists \, a_0 \in A \quad \text{sodass} \quad a_0 \leq a \ \ \forall \, a \in A$$

Bemerkungen.

(i) Jede **endliche** total geordnete Menge ist wohlgeordnet.

(ii) $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung ist wohlgeordnet.

(iii) Jede (nichtleere) Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist (mit der induzierten Ordnung) wieder wohlgeordnet.

(iv) $X = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0$ mit der üblichen Ordnung ist **nicht** wohlgeordnet.
X selbst hat zwar ein kleinstes Element, jedoch nicht die Teilmenge $A = \{x \in X \ : \ 1 < x < 2\}$.

(v) Sei $(X, \leq)$ wohlgeordnet, und sei $a \in X$ nicht das (möglicherweise) größte Element. Dann ist $A = \{x \in X \; : \; a < x\}$ nichtleer und hat ein kleinstes Element.

Das bedeutet: in einer wohlgeordneten Menge hat jedes Element (sofern es nicht das größte Element ist) einen eindeutig bestimmten unmittelbaren **Nachfolger**.

Frage: hat jedes Element (sofern es nicht das kleinste Element ist) immer auch einen unmittelbaren Vorgänger (wie es etwa bei $\mathbb{N}$ der Fall ist)?

Beispiel. Sei $X = \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$.

Wir definieren eine Ordnungsrelation durch

$(a, b) \leq (c, d)$ genau dann wenn $b < d$ oder wenn $a \leq c$ (im Falle dass $b = d$).

Man überlege sich, dass dies eine Wohlordnung ist. Zuerst kommen also alle Elemente $(n, 0)$ und dann die Elemente $(m, 1)$.

Offenbar hat das Element $(0, 1)$ keinen unmittelbaren Vorgänger. $\square$

Eine weitere wichtige Eigenschaft wohlgeordneter Mengen liefert der folgende

Satz. Sei $(X, \leq)$ wohlgeordnet und $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

Es gelte für jedes $x \in X$: wenn $X_x \subseteq Y$ dann $x \in Y$.

Dann ist notwendigerweise $Y = X$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $Y \neq X$ ist, also $X \setminus Y \neq \emptyset$.

Sei a das kleinste Element von $X \setminus Y$ (und damit $a \notin Y$).

Falls $X_a = \emptyset$, dann laut Voraussetzung $a \in Y$, ein Widerspruch.

Andernfalls gilt für jedes $x < a$ dass $x \in Y$, und damit $X_a \subseteq Y$, und folglich laut Voraussetzung $a \in Y$, ebenfalls ein Widerspruch. $\square$

Daraus folgt nun das Prinzip der **Induktion über wohlgeordnete Men-**

gen.

Satz. Sei $(X, \leq)$ wohlgeordnet, und P eine Eigenschaft, welche für das kleinste Element von X erfüllt ist.

Es gelte für jedes x : wenn die Eigenschaft P bezüglich jedes $y < x$ gilt, dann auch für x .

Dann gilt: die Eigenschaft P ist bezüglich **jedes** $x \in X$ erfüllt.

Beweis. Sei $Y = \{x \in X \ : \ P$ ist bezüglich x erfüllt $\}$. Wegen vorher ist $Y = X$. $\square$

Bemerkung. Man überlege sich, dass dieser Satz nicht gilt, wenn $(X, \leq)$ lediglich total geordnet ist.

(Sei $X = [0,1) \cup (2,3) \subseteq \mathbb{R}$. Die Elemente von $[0,1)$ seien "weiß", und die Elemente von $(2,3)$ seien "schwarz")

....

Definition. Eine **Ordinalzahl** ist eine wohlgeordnete Menge $(X, \leq)$ sodass $X_a = a$ für alle $a \in X$, i.e. jedes Element ist die Menge seiner Vorgänger.

$\emptyset$ ist per definition eine Ordinalzahl.

Beispiel. Die einelementige Menge $X = \{\emptyset\}$ ist eine Ordinalzahl.

Sei $(X, \leq)$, $X \neq \emptyset$ eine Ordinalzahl und $a \in X$ das kleinste Element. Dann gilt $X_a = \emptyset$ und folglich $a = \emptyset$.

Damit ist $\emptyset$ das kleinste Element **jeder** Ordinalzahl.

Ist nun $X \setminus \{a\} \neq \emptyset$, dann hat diese Menge ein kleinstes Element b .

Folglich $b = X_b = \{a\} = \{\emptyset\}$.

Ist nun $X \setminus \{a, b\} \neq \emptyset$, dann hat diese Menge ein kleinstes Element c .

Folglich $c = X_c = \{a, b\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Beobachtung. Es ergibt sich, dass die ersten Elemente **jeder** Ordinahlzahl $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\ldots$ sind.

Wir sehen weiters, dass diese Elemente selbst Ordinalzahlen sind.

Beobachtung. Sei X eine Ordinahlzahl und sei $b \in X$ der unmittelbare Nachfolger von $a \in X$. Dann besteht X_b aus a und allen Vorgängern von a , und damit ist $b = X_b = a \cup \{a\}$.

Die zuvor betrachteten "ersten" Ordinalzahlen können mit den natürlichen Zahlen identifiziert werden bzw. zur Definition der natürlichen Zahlen dienen.

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$

etc.

allgemein: $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

In diesem Sinne ist jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl.

Wir zeigen später, dass die Vereinigung von Ordinahlzahlen wieder eine Ordinalzahl ist. Die Menge aller natürlichen Zahlen, als Ordinalzahl betrachtet, wird mit ω bezeichnet.

Beobachtung. Sei x eine Ordinalzahl. Wir bilden eine neue wohlgeordnete Menge $a = x \cup \{x\}$ bei der x das letzte Element ist.

Dann ist a wieder eine Ordinahlzahl. Die Abschnitte von a sind die Abschnitte von x und x selbst.

Lemma. Sei $(X, \leq)$ wohlgeordnet, $Y \subseteq X$ und $f : X \to Y$ ein Isomorphismus (es genügt injektiv und ordnungserhaltend).

Dann gilt $f(x) \geq x$ für alle $x \in X$.

Beweis. Annahme: $E = \{x \in X \ : \ f(x) < x\} \neq \emptyset$.

Sei x_0 das kleinste Element von E . Damit $f(x_0) < x_0$. Laut Vor. ist dann $f(f(x_0)) < f(x_0)$ und folglich $f(x_0) \in E$, ein Widerspruch. $\square$

Lemma. Es gibt höchstens einen Isomorphismus zwischen zwei wohlgeordneten Mengen X und Y .

Beweis. Seien $f, g : X \to Y$ Isomorphismen. Dann ist auch $g^{-1} \circ f : X \to X$ ein Isomorphismus.

Wegen des Lemmas zuvor ist $x \leq g^{-1}(f(x)) \quad \forall\, x \in X$.

Weil g ein Isomorphismus ist, erhalten wir $g(x) \leq f(x) \quad \forall\, x \in X$.

Analog folgt $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in X$, und damit $f = g$. $\square$

Folgerung. Es gibt **keinen** Isomorphismus zwischen einer wohlgeordneten Menge X und einem ihrer Abschnitte.

(Wäre $f : X \to X_a$ ein Isomorphismus, dann $f(a) \in X_a$, also $f(a) < a$, ein Widerspruch.)

Lemma. Sei $(X, \leq)$ wohlgeordnet, und sei $A = \{X_a \ : \ a \in X\}$ die Menge aller Abschnitte.

Dann ist $(A, \subseteq)$ (ordnungs)isomorph zu $(X, \leq)$, und dieser Isomorphismus ist durch $f(a) = X_a$ gegeben. (Beweis als Übung).

Lemma. Jeder Abschnitt einer Ordinalzahl ist wieder eine Ordinalzahl. (Und damit ist jedes Element einer Ordinalzahl selbst wieder eine Ordinalzahl.)

Beweis. Sei X eine Ordinalzahl und X_a ein Abschnitt. Dann ist X_a mit der induzierten Ordnung wohlgeordnet.

Was ist nun die Menge der Vorgänger $(X_a)_b$ von $b \in X_a$ bzgl. X_a ?

$(X_a)_b = \{x \in X_a \ : \ x < b\}$.

Offenbar ist $(X_a)_b \subseteq X_b$. Ist $y \in X_b$, dann ist $y < b < a$ und damit

$y \in X_a$, also $y \in (X_a)_b$ und folglich $(X_a)_b = X_b = b$.

Damit ist X_a eine Ordinalzahl. $\square$

Lemma. Seien X, Y Ordinalzahlen und $Y \subset X$. Dann ist Y ein Abschnitt von X .

Beweis. Sei a das kleinste Element von $X \setminus Y$. Dann gilt $X_a \subseteq Y$.

Sei nun $y \in Y$. Dann ist $y \neq a$. Wäre $a < y$ dann $y = X_y = Y_y$ und folglich $a \in Y$, ein Widerspruch.

Also ist $y < a$ und damit gilt $Y \subseteq X_a$ und insgesamt $Y = X_a$. $\square$

Lemma. Seien X, Y **verschiedene** Ordinalzahlen. Dann ist eine ein Abschnitt der anderen.

Beweis. Wir beobachten zuerst dass $X \cap Y$ eine Ordinalzahl ist. Ist nämlich $a \in X \cap Y$ dann gilt $X_a = a = Y_a$.

Folglich gilt $x < a \Rightarrow x \in X \cap Y$ bzw. $a = (X \cap Y)_a$. Man beobachte weiters, dass die bzgl. X induzierte Wohlordnung auf $X \cap Y$ übereinstimmt mit jener bzgl. Y .

Mit dem Lemma vorher ist dann $X \cap Y$ ein Abschnitt sowohl von X als auch von Y .

Annahme: $X \nsubseteq Y$ und $Y \nsubseteq X$.

Dann ist $X \cap Y = X_a$ für ein $a \in X$ und offenbar $a \notin Y$. Analog ist $X \cap Y = Y_b$ für ein $b \in Y \setminus X$.

Dann folgt aber $a = X_a = X \cap Y = Y_b = b$, ein Widerspruch.

Gelte also etwa $Y \subset X$. Dann ist $Y = X \cap Y$ und Y ist ein Abschnitt von X . $\square$

Satz. Die Vereinigung einer Menge von Ordinalzahlen ist eine Ordinalzahl.

Beweis. Sei also X eine Menge von Ordinalzahlen. Wir erwähnten schon, dass die Elemente von Ordinalzahlen selbst Ordinalzahlen sind und damit ist dann $A = \bigcup X$ eine Menge von Ordinalzahlen.

Wir betrachten folgende Relation $<$ auf A :

$x < y$ wenn x ein Abschnitt von y ist

Dann ist $<$ irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv (sei $x < y$ und $y < z$. Dann ist $y = z_y$, $x = y_x = (z_y)_x = z_x$, also $x < z$).

Mit dem vorhergehenden Lemma ist $<$ eine strikte Totalordnung. Wir behaupten nun, dass $<$ sogar eine Wohlordnung ist.

Sei $\emptyset \neq B \subseteq A$. Wähle $b \in B$. Wenn b nicht das kleinste Element von B ist, dann ist $\{x \ : \ x < b\} \cap B \neq \emptyset$ und diese Menge hat ein kleinstes Element b^* weil b wohlgeordnet ist.

b^* ist dann das kleinste Element von B ($c < b^*$, $c \in B \Rightarrow c < b$, Widerspruch)

Nun sei $a \in A$. Wähle $x \in X$ mit $a \in x$. Dann ist $a = x_a$, und alle Elemente von a sind in x und damit in A , also $a = A_a$. $\square$

Wir beobachten, dass für (ordnungs)isomorphe Ordinalzahlen X, Y gilt, dass $X = Y$. Wenn $X \neq Y$, dann ist eine ein Abschnitt der anderen und es gibt keinen Isomorphismus zwischen einer wohlgeordneten Menge und einem Abschnitt ihrer selbst.

Der folgende wichtige Satz läßt sich so interpretieren, dass Ordinalzahlen den **Ordnungstyp** von wohlgeordneten Mengen beschreiben.

Satz. Jede wohlgeordnete Menge ist isomorph zu einer Ordinalzahl (welche gemäß vorher eindeutig bestimmt ist).

Beweis. Es genügt zu zeigen: Sei $(X, \leq)$ wohlgeordnet und jeder Abschnitt X_a ist isomorph zu einer Ordinalzahl. Dann ist X isomorph zu einer Ordinalzahl.

(Sei $P(a)$ die Eigenschaft "X_a ist isomorph zu einer Ordinalzahl" . Mit Induktion folgt dann "X ist isomorph zu einer Ordinalzahl")

Sei $g_a : X_a \to Z(a)$ ein Isomorphismus für jedes $a \in X$, wobei $Z(a)$ eine Ordinalzahl ist. Setze $W = \{Z(a) \ : \ a \in X\}$.

Wenn $x, y \in X$, $x < y$ dann ist $Z(x) \subseteq Z(y)$.

($Z(x) \neq Z(y)$ weil verschiedene Abschnitte nicht isomorph sein können.

$Z(y) \subseteq Z(x)$ ist nicht möglich, weil sonst eine injektive Abbildung

$$X_y \overset{g_y}{\to} Z(y) \overset{Inklusion}{\to} Z(x) \overset{g_x^{-1}}{\to} X_x$$

existieren würde mit $x < x$, ein Widerspruch.)

Damit:

Wird W mittels $\subseteq$ geordnet, dann ist die Abbildung $X \to W$, $a \mapsto Z(a)$ ein Isomorphismus, und damit ist auch W wohlgeordnet (weil isomorph zu X).

W ist eine Menge von Ordinalzahlen, und damit selbst eine Ordinalzahl.

(Zur Übung: weil die Elemente von W Ordinalzahlen sind, gilt $b = W_b$ für jedes $b \in W$.) $\square$

Man kann sich nun fragen, ob die Zusammenfassung **aller** Ordinalzahlen eine Menge bildet.

Burali-Forti-Paradox: Die Zusammenfassung aller Ordinalzahlen bildet **keine** Menge. Man spricht von der **Klasse** Ord aller Ordinalzahlen.

(Wäre die Zusammenfassung aller Ordinalzahlen eine Menge O , dann wäre O selbst eine Ordinalzahl und wir hätten $O \in O$ bzw. $O < O$, ein Widerspruch.)

Bei der bisherigen Diskussion über Ordinalzahlen tauchten stets die Relationen " $<$ " , " $\in$ " ," $\subseteq$ " auf. Der folgende Satz fasst zusammen, dass diese Relationen gleichbedeutend sind.

Satz. Seien x, y Ordinalzahlen. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $x < y$, (b) $x \in y$, (c) $x \subset y$

(Weiters ist stets entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$ erfüllt.)

Beweis. $x < y$ bedeutet hier, dass x, y Elemente einer Ordinalzahl z sind bezüglich derer $x < y$ gilt. (Dies ist wegen $x = z_x$ und $y = z_y$ allerdings unabhängig vom gewählten z .)

Ist x ein Abschnitt von y , dann ist etwa der unmittelbare Nachfolger von y eine Ordinahlzahl z mit $x, y \in z$.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) : weil $x < y \Leftrightarrow x \in z_y = y$

(a) $\Leftrightarrow$ (c) : $x < y \Rightarrow x = z_x \subseteq z_y = y$

Wenn $x \not< y \Rightarrow x = y$ oder $y < x$. Damit $y \subset x$ und $x \nsubseteq y$. $\square$

In gewisser Weise kann auch eine Induktion über **alle** Ordinalzahlen erklärt werden (obwohl die Zusammenfassung aller Ordinalzahlen keine Menge ist!).

Sei P eine Eigenschaft von Ordinalzahlen, welche zumindest für eine Ordinalzahl erfüllt ist. Es gelte: wenn $P(y)$ für alle $y < x$, dann auch $P(x)$.

Dann gilt $P(x)$ für alle Ordinalzahlen.

(Um $P(x)$ zu zeigen, wendet man Induktion etwa über den Nachfolger von x an.)

Bemerkungen.

(a) 0 ist die kleinste Ordinalzahl. $(0 = \emptyset)$

(b) Für eine Ordinalzahl α ist $\alpha \cup \{\alpha\}$ ebenfalls eine Ordinalzahl, der **Nachfolger** $s(\alpha)$ von α .
$s(\alpha)$ ist die kleinste Ordinalzahl größer als α und wird auch mit $\alpha + 1$ bezeichnet.

(c) $\lambda \neq 0$ heißt **Limes-Ordinalzahl**, wenn $\lambda = \bigcup\limits_{\alpha < \lambda} \alpha$.

ω ist eine Limes-Ordinalzahl. $s(\alpha)$ ist keine Limes-Ordinalzahl, weil $\bigcup\limits_{\beta < s(\alpha)} \beta = \alpha$.

(d) (Ohne Beweis) Jede Ordinalzahl $\neq 0$ ist entweder eine Nachfolger-Ordinalzahl oder eine Limes-Ordinalzahl.

Bemerkung. Beim Induktionsbeweis über Ordinalzahlen ist zu zeigen, dass $P(\alpha)$ erfüllt ist unter der Voraussetzung dass $P(\beta)$ erfüllt ist für alle $\beta < \alpha$.

Da es nun zwei Arten von Ordinalzahlen gibt, stellt sich in der Praxis heraus, dass oft unterschiedliche Induktionsbeweise zu führen sind. Deshalb wird die Induktion über Ordinalzahlen zumeist so formuliert.

Sei P eine Eigenschaft von Ordinalzahlen und sei $P(0)$ erfüllt (Induktionsanfang).

- wenn $\alpha = s(\beta)$: $P(\beta) \Rightarrow P(\alpha)$
- wenn α Limesordinahlzahl und $P(\beta)$ erfüllt für alle $\beta < \alpha \Rightarrow P(\alpha)$

Dann ist $P(\alpha)$ für alle α erfüllt.

. . . .

Arithmetik mit Ordinalzahlen.

Bekanntlich gibt es innerhalb der natürlichen Zahlen arithmetische Operationen wie Addition, Multiplikation und Exponentiation und die zugehörigen Rechenregeln. Diese wollen wir nun auf die Ordinalzahlen erweitern.

Dazu definieren wir zuerst die geordnete Summe und das lexikographische Produkt von beliebigen partial geordneten Mengen.

Seien $(X, \leq_X)$ und $(Y, \leq_Y)$ partial geordnete Mengen.

1) Die **geordnete Summe** von X und Y ist dann $(Z, \leq_Z)$ mit

- $Z = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ (um Disjunktheit von X und Y zu erzeugen)
- $(x_1, 0) \leq_Z (x_2, 0)$ wenn $x_1 \leq_X x_2$
- $(y_1, 1) \leq_Z (y_2, 1)$ wenn $y_1 \leq_Y y_2$

- $(x,0) \leq_Z (y,1)$ für alle $x \in X$, $y \in Y$

2) Das **lexikographische Produkt** von X und Y ist $(W, \leq_W)$ mit

- $W = X \times Y$
- $(x_1, y_1) <_W (x_2, y_2)$ wenn $x_1 <_X x_2$
- $(x, y_1) <_W (x, y_2)$ wenn $y_1 <_Y y_2$

Bemerkung. Sind $(X, \leq_X)$ und $(Y, \leq_Y)$ total geordnet (bzw. wohlgeordnet), dann auch die geordnete Summe und das lexikographische Produkt (Beweis zur Übung).

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Summe bzw. das Produkt von Ordinalzahlen zu definieren. Es stellt sich dabei heraus, dass beide Möglichkeiten äquivalent sind.

Seien α, β Ordinalzahlen.

1) $\alpha + \beta$ ist die eindeutig bestimmte Ordinalzahl welche isomorph zur geordneten Summe von α und β ist.

$\alpha \cdot \beta$ ist die eindeutig bestimmte Ordinalzahl welche isomorph zum lexikographischen Produkt von α und β ist.

2) (induktive Definition)

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$
- $\alpha + \lambda = \bigcup\limits_{\beta < \lambda} (\alpha + \beta)$ wenn λ Limes-Ordinalzahl ist.
- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot s(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
- $\alpha \cdot \lambda = \bigcup\limits_{\beta < \lambda} (\alpha \cdot \beta)$ wenn λ Limes-Ordinalzahl ist.

Weiters definieren wir

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{s(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
- $\alpha^\lambda = \bigcup\limits_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$ wenn λ Limes-Ordinalzahl ist.

Eigenschaften. (ohne Beweis)

(a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(b) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

(c) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$

(d) $\gamma + \alpha = \gamma + \beta \;\Rightarrow\; \alpha = \beta$

Bemerkungen.

(i) Offenbar gilt $1+\omega = \omega \neq \omega + 1$ und damit ist die Addition i.a. **nicht** kommutativ.

(ii) $\omega + \omega$ kann man sich so vorstellen, dass zwei Kopien von ω nebeneinander gestellt werden.

$$\overset{0}{\cdot}\;\overset{1}{\cdot}\;\ldots\;\overset{\omega}{\cdot}\;\overset{\omega+1}{\cdot}\;\ldots\;\overset{\omega+\omega}{\cdot}$$

(iii) $\omega \cdot \omega$ kann man sich als unendliche Matrix vorstellen bzw. als eine unendliche Folge von unendlichen Folgen.

Die "größeren" Ordinalzahlen werden immer schwerer vorstellbar.

Aus $\omega^2 = \omega \cdot \omega$ entstehen ω^3 , ω^4 , ... bis $\omega^\omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega^n$.

Auch dies kann interiert werden, und man erhält ω^{ω^ω} und in weiterer Folge $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^\omega}}}} =: \omega_n$ bei (n-facher Exponentiation).

Allgemein können die Ordinalzahlen ω_α definiert werden durch

- $\omega_0 = \omega$
- $\omega_{s(\alpha)} = \omega^{\omega_\alpha}$
- $\omega_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \omega_\alpha$ wenn λ Limes-Ordinalzahl ist.

Damit ist ω_ω der unendliche "Turm" $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$.

Wird auch dies iteriert, erreicht man schließlich $\epsilon = \omega_{\omega_{\ddots}}$.

Man beachte, dass alle diese Ordinalzahlen abzählbar sind und verschiedene Wohlordnungen auf einer abzählbaren Menge beschreiben.

Nach all diesen liegt die erste überabzählbare Ordinalzahl .... !

. . . .

Die Hierarchie der Mengen (nach Zermelo und Fraenkel, ZF)

Um das Paradox von Russell zu vermeiden, schlugen E. Zermelo und A. Fraenkel vor, das "Universum der Mengen" in wohlgeordneten Stufen aufzubauen. Die einzelnen Stufen sind dabei mittels der Ordinalzahlen indiziert.

V_α ... Menge aller jener Mengen, die auf der Stufe α "existieren".

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{s(\alpha)} = \mathcal{P}V_\alpha$
- $V_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ wenn λ Limes-Ordinalzahl ist.

Damit: $V_1 = \{\emptyset\}$, $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, V_1\}$

$V_3 = \{ \ \emptyset \ , \ \{\emptyset\} \ , \ \{\{\emptyset\}\} \ , \ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ \}$ etc.

Diese Vorgangsweise liefert "alle" Mengen, und jede Menge liegt dabei in einer der Stufen V_α . Man schreibt symbolisch

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$$

Dabei ist V die Klasse aller Mengen, und On die Klasse aller Ordinalzahlen.

Satz. $\alpha < \beta \Rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$

Beweis. (Wir wenden doppelte Induktion an.)

Schritt 1. Behauptung: $V_\alpha \subseteq V_{s(\alpha)}$ für alle α

- Behauptung ist erfüllt für $\alpha = 0$

- Sei $\alpha = s(\gamma)$. Dann ist $V_\alpha = \mathcal{P}V_\gamma$.

Ist nun $x \in V_\alpha$, dann $x \subseteq V_\gamma \subseteq V_{s(\gamma)} = V_\alpha$ (wegen Ind.voraussetzung).

- Sei α Limes-Ordinalzahl und $x \in V_\alpha$. Dann $\exists\ \delta < \alpha$ mit

$x \in V_\delta \Rightarrow x \in V_{s(\delta)} \subseteq V_{s(\alpha)}$ weil $V_{s(\delta)} = \mathcal{P}V_\delta \subseteq \mathcal{P}V_\alpha = V_{s(\alpha)}$.

Schritt 2. Annahme: $\alpha < \beta$ und $V_\alpha \nsubseteq V_\beta$.

Sei β dabei die kleinste Ordinalzahl mit $V_\alpha \nsubseteq V_\beta$. Dann ist $\beta \neq 0$.

- β ist Nachfolger-Ordinalzahl, i.e. $\beta = s(\gamma)$.

Dann ist $\alpha \leq \gamma$ und $V_\alpha \subseteq V_\gamma \subseteq V_{s(\gamma)} = V_\beta$, ein Widerspruch.

- β ist Limes-Ordinalzahl.

Dann $\exists\ \delta$ mit $\alpha \leq \delta < \beta \Rightarrow V_\alpha \subseteq V_\delta \Rightarrow V_\alpha \subseteq \bigcup_{\lambda < \beta} V_\lambda = V_\beta$, ein Widerspruch. $\square$

Satz. $\alpha \subseteq V_\alpha$ und damit $\alpha \in V_{s(\alpha)}$.

Beweis.

- Behauptung ist erfüllt für $\alpha = 0\ (= \emptyset)$

- $\alpha = s(\gamma)$: Dann ist $\gamma \subseteq V_\gamma \subseteq V_\alpha$ und $\gamma \in V_{s(\gamma)} = V_\alpha$ und folglich

$\alpha \subseteq V_\alpha$.

- Falls α Limes-Ordinalzahl ist, dann

$\alpha = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \delta \subseteq \bigcup\limits_{\delta<\alpha} V_\delta = V_\alpha$. $\square$

Bemerkung. Hier wird die Hierarchie "aller" Mengen mittels Ordinalzahlen konstruiert (die allerdings selbst Mengen sind). Es stellt sich hier die Frage, ob eine Zirkularität vorliegt.

Man kann aus dieser Hierarchie Aussagen über Mengen herleiten, welche dann in weiterer Folge als Axiome für eine formale Theorie dienen.