Das Auswahlaxiom

Das Auswahlaxiom (AC) ist jenes Axiom innerhalb von ZFC, welches zahlreiche Diskussionen auslöst. Es wird allerdings in vielen Bereichen der Mathematik benötigt (z.B. dafür, dass das beliebige Produkt von Mengen nichtleer ist).

Wir betrachten nun folgende weitere Aussagen.

Wohlordnungssatz (WO) : Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

Sei $(X, \leq)$ eine partial geordnete Menge. Eine Kette (in $(X, \leq)$) ist eine nichtleere Teilmenge $Y \subseteq X$, welche bzgl. $\leq$ total geordnet ist (d.h. je zwei Elemente von Y sind vergleichbar). Eine obere Schranke für eine Teilmenge $C \subseteq X$ ist ein Element $x \in X$ sodass $c \leq x \ \ \forall \, c \in C$ (x braucht nicht in C zu liegen).

Lemma von Zorn (ZL) : Sei $(X, \leq)$ eine nichtleere partial geordnete Menge wo jede Kette eine obere Schranke (in $(X, \leq)$) besitzt. Dann besitzt $(X, \leq)$ zumindest ein maximales Element.

Satz. In ZF sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) (AC)

(2) (WO)

(3) (ZL)

Beweis :

"(WO) $\Rightarrow$ (AC)" : Sei A eine nichtleere Menge und $a \neq \emptyset \ \ \forall \, a \in A$. Dann ist $\cup A = \{x \ : \ \exists \, a \in A \text{ mit } x \in a\}$, also $a \subseteq \cup A \ \ \forall \, a \in A$.

Laut Voraussetzung kann $\cup A$ wohlgeordnet werden. Sei $f(a)$ das kleinste Element von a . Dann ist f eine Auswahlfunktion.

"(AC) $\Rightarrow$ (ZL)" : Sei $(X, \leq)$ eine nichtleere partial geordnete Menge wo jede Kette eine obere Schranke (in $(X, \leq)$) besitzt. Annahme: $(X, \leq)$

besitzt kein maximales Element. Also gibt es für jedes $y \in X$ ein $x \in X$ mit $x > y$.

Nach Voraussetzung gibt es eine Auswahlfunktion f für die Familie aller nichtleeren Teilmengen von X .

Wir ordnen nun (induktiv) jeder Ordinalzahl α ein Element $H(\alpha)$ von X zu mit der Eigenschaft $H(\alpha) < H(\beta)$ für $\alpha < \beta$.

Sei $H(0) = f(X)$.

Zu α sei $H(s(\alpha)) = f(\{x \in X \ : \ x > H(\alpha)\})$.

Sei λ eine Limes-Ordinalzahl. Dann ist $H(\alpha) < H(\beta)$ für $\alpha < \beta < \lambda$. Laut Voraussetzung hat dann die Menge $\{H(\alpha) \ : \ \alpha < \lambda\}$ zumindest eine obere Schranke.

Wir setzen $H(\lambda) = f(Y)$, wo Y Menge aller oberen Schranken ist.

Wir hätten damit eine injektive Funktion von Ord nach X bzw. eine surjektive Funktion von X nach Ord , was nicht möglich ist.

"(ZL) $\Rightarrow$ (WO)" : Sei X eine nichtleere Menge. Es genügt, eine bijektive Abbildung zwischen X und einer Ordinalzahl zu finden.

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller geordneten Paare (X', f') mit $X' \subseteq X$ und f' ist eine Bijektion zwischen X' und einer Ordinalzahl. Offenbar gilt dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Definiere eine Relation $\leq$ auf $\mathcal{F}$ durch $(X', f') \leq (X'', f'')$ genau dann wenn $X' \subseteq X''$ und $f'(x) = f''(x)$ für alle $x \in X'$. Offenbar ist $\leq$ eine Partialordnung auf $\mathcal{F}$.

Sei nun $\mathcal{C}$ eine Kette in $\mathcal{F}$ und sei X^* die Vereinigung der $X' \in \mathcal{C}$. Für $x \in X^*$ setze $f(x) = f'(x)$ falls $x \in X'$.

Dann ist f wohldefiniert (!), die Menge der $f(x)$, $x \in X^*$, ist eine Menge von Ordinalzahlen und damit selbst eine Ordinahlzahl α , und f ist eine bijektive Abbildung zwischen X^* und α . Folglich ist $(X^*, f) \in \mathcal{F}$ und eine obere Schranke von $\mathcal{C}$.

Nach Voraussetzung gibt es ein maximales Element (X_0, f_0) in $\mathcal{F}$. Wir behaupten, dass $X_0 = X$ ist.

Annahme: es gibt ein Element $x \in X \setminus X_0$. Sei $f_0 : X_0 \to \alpha$ und setze $X_1 = X_0 \cup \{x\}$. Definiere $f_1 : X_1 \to \alpha + 1$ durch $f_1(y) = f_0(y)$ wenn $y \in X_0$ und $f_1(y) = \alpha$ wenn $y = x$. Dann ist $(X_1, f_1) \in \mathcal{F}$ und $(X_0, f_0) < (X_1, f_1)$, ein Widerspruch zur Maximalität von (X_0, f_0) .

QED.

Als Anwendungen des Auswahlaxioms ergeben sich etwa folgende Aussagen.

1) In ZFC besitzt jeder Ring mit Einselement (mindestens) ein maximales Ideal.

2) In ZFC besitzt jeder Vektorraum eine Basis.

3) In ZFC gilt der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik für jede beliegige Menge von Aussagenvariablen.

Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge X heißt eine σ-Algebra auf X wenn $X \in \mathcal{A}$ ist und $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist bezüglich abzählbarer Vereinigung und Komplementbildung (trivialerweise ist die Potenzmenge eine σ-Algebra). Ein Maß ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\bigcup\limits_{n \in N} A_n) = \sum\limits_{n \in N} \mu(A_n)$ falls die Mengen A_n paarweise disjunkt sind.

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ ergibt sich aus der Fragestellung, Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Maß zuzuordnen, welches die Länge von Intervallen verallgemeinert. Durch die entsprechende Konstruktion stellt sich heraus, dass abzählbare Mengen das Maß 0 besitzen, und das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist (im $\mathbb{R}^n$ ist es auch rotationsinvariant). Vorderhand ist allerdings nicht klar, wie "groß" die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen ist.

Satz. In ZFC besitzt $\mathbb{R}$ Teilmengen, welche NICHT messbar sind.

Als Konsequenz ergibt sich das **Banach-Tarski Paradox**: Die Einheitskugel kann in endlich viele Stücke zerlegt werden, welche wiederum zu zwei Einheitskugeln zusammengefasst werden können. (Selbstverständlich müssen die beteiligten Stücke der Zerlegung nicht-messbare Mengen sein).

Bemerkung. Es gibt Modelle von ZF, wo jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ messbar ist.

Bemerkung. (AC) ist nicht gleichwertig damit, dass der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik gilt. Es gibt Modelle der Mengenlehre, wo der Kompaktheitssatz gilt und (AC) nicht.