

02. Vektorräume und Untervektorräume

Wir kommen nun zur eigentlichen Definition eines \mathbb{K} -Vektorraums. Dabei ist \mathbb{K} ein Körper (bei uns meist \mathbb{R} oder \mathbb{C}).

Informell ist ein \mathbb{K} -Vektorraum eine Menge V , auf der eine "Addition" von je zwei Elementen aus V und eine "Multiplikation" von Elementen aus \mathbb{K} mit Elementen aus V mit gewissen Eigenschaften erklärt sind.

Definition. Ein \mathbb{K} -Vektorraum (bzw. Vektorraum über \mathbb{K}) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, wobei V eine Menge ist, " $+$ " : $V \times V \rightarrow V$ $((v, w) \mapsto v + w)$ und " \cdot " : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ $((\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v)$ Abbildungen sind, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- 1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- 2) $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:
$$(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$$
$$\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$$
$$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$
$$1 \cdot v = v \quad (1 \dots \text{Einselement in } \mathbb{K})$$

Die Elemente eines Vektorraums V heißen **Vektoren**, die Elemente von \mathbb{K} **Skalare**, und \mathbb{K} ist der sogenannte **Skalarenkörper**.

Bemerkungen.

- Die Operationen " $+$ " und " \cdot " beschreiben also die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Skalaren mit Vektoren.
- Die **Subtraktion** von Vektoren ist in offensichtlicher Weise definiert, nämlich durch $v - w = v + (-w)$.
- Wir werden folgende vereinfachte Schreibweisen verwenden:

$$\begin{aligned}
V & \text{ statt } (V, +, \cdot) \\
\lambda v & \text{ statt } \lambda \cdot v \\
\lambda v + \mu w & \text{ statt } (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot w) \\
\frac{1}{\lambda} & \text{ statt } \lambda^{-1} \quad (\text{für } \lambda \in \mathbb{K})
\end{aligned}$$

- Mittels vollständiger Induktion folgt sofort, dass Ausdrücke der Form $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ bzw. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ wegen der Assoziativität der Addition wohldefiniert sind.

Grundlegende Beispiele für Vektorräume.

1. Sei \mathbb{K} ein Körper. Dann ist

$$\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

ein \mathbb{K} -Vektorraum mittels der Operationen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Offenbar ist der Nullvektor gleich $0 = (0, 0, \dots, 0)$ und der inverse Vektor zu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ergeben sich hier der \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^n und der \mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{C}^n .

Für $n = 1$ bedeutet dies, dass \mathbb{K} ein Vektorraum über sich selbst ist.

2. Sei X eine beliebige Menge und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann ist

$$\text{Abb}(X, V) = \{f : X \rightarrow V : f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

ein \mathbb{K} -Vektorraum mittels der Operationen

$$(f, g) \mapsto f + g \quad \text{wobei} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X$$

$$(\lambda, f) \mapsto \lambda f \quad \text{wobei} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in X$$

In diesem Vektorraum $\text{Abb}(X, V)$ sind die Vektoren also alle Abbildungen $X \rightarrow V$.

Der Nullvektor in $\text{Abb}(X, V)$ ist die "Nullabbildung" $0 : X \rightarrow V$, welche jedem $x \in X$ den Nullvektor in V zuordnet.

Das inverse Element von $f : X \rightarrow V$ bzgl. der Addition ist die Abbildung $-f : X \rightarrow V$, welche durch $(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in X$ gegeben ist, wobei $-f(x)$ das zu $f(x)$ inverse Element in V bezeichnet.

Spezialfall. Für $V = \mathbb{R}$ bzw. $V = \mathbb{C}$ erhält man auf diese Weise die Vektorräume $\text{Abb}(X, \mathbb{R})$ bzw. $\text{Abb}(X, \mathbb{C})$, und in weiterer Spezialisierung etwa die Vektorräume $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $\text{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Beispiel. Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$. Dann ist $f + g$ die Abbildung, die durch $(f + g)(x) = x^2 + e^x$ gegeben ist.

3. (Spezialisierung von 2., Polynome vom Grad $\leq n$)

Sei $\mathbb{P}_n = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \text{ mit } p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$

Dann ist $\mathbb{P}_n \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und mit den Operationen von 2. ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Für $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n$, $q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_n t^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$(p + q)(t) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)t + \dots + (p_n + q_n)t^n \in \mathbb{P}_n$$

$$(\lambda p)(t) = \lambda p_0 + (\lambda p_1)t + \dots + (\lambda p_n)t^n \in \mathbb{P}_n.$$

4. Man beachte, dass \mathbb{R}^n auch ein Vektorraum über \mathbb{Q} ist, und \mathbb{C}^n auch ein Vektorraum über \mathbb{R} ist.

Erste einfache Eigenschaften bzw. Rechenregeln

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann gilt:

1) $0 \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

2) $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$3) \lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ oder } v = 0$$

$$4) (-1) \cdot v = -v \quad \forall v \in V .$$

Beweis.

zu 1) : $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Somit ist $0 \cdot v$ das neutrale Element bzgl. der Addition, also $0 \cdot v = 0$.

zu 2) : $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$. Somit ist $\lambda \cdot 0$ das neutrale Element bzgl. der Addition, also $\lambda \cdot 0 = 0$.

zu 3) : Sei $\lambda \cdot v = 0$. Wenn $\lambda = 0$, dann ist auch $\lambda \cdot v = 0$ wegen 1) . Wenn $\lambda \neq 0$, dann $v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = 0$ wegen 2) .

zu 4) : $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$. Das heißt, dass $(-1) \cdot v$ das (bzgl. der Addition) inverse Element zu v ist, also $(-1) \cdot v = -v$.

In einem Vektorraum V kann es vorkommen, dass gewisse nichtleere Teilmengen $W \subseteq V$ mit den Operationen in V ebenfalls Vektorräume sind. Solche Teilmengen W heißen dann **Untervektorräume** von V .

Definition. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $W \subseteq V$.

W heißt ein **Untervektorraum** (von V), wenn

$$\text{UV1) } W \neq \emptyset$$

$$\text{UV2) } v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$$

$$\text{UV3) } v \in W, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda v \in W$$

Man überprüft leicht, dass dadurch mit den in V gegebenen Operationen " + " und " · " die Teilmenge W selbst zu einem \mathbb{K} -Vektorraum wird.

Schreibweise: $W \triangleleft V$.

Man beachte, dass der Nullvektor von V wegen UV3) auch in W liegt, und der Nullvektor des Vektorraums W ist.

Des weiteren ist zu $v \in W$ auch $(-1)v = -v \in W$, und $-v$ ist auch das inverse Element von v bzgl. des Vektorraums W .

Bemerkung. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\emptyset \neq W \subseteq V$. Dann gilt:
 W ist Untervektorraum $\Leftrightarrow \forall v, w \in W \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda v + \mu w \in W$

Bemerkung. Sei $W \triangleleft V$. Mittels vollständiger Induktion zeigt man leicht, dass $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_r w_r \in W$, falls $w_1, w_2, \dots, w_r \in W$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

Bemerkung. Für einen \mathbb{K} -Vektorraum V und $A, B \subseteq V$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$ erinnern wir an die Schreibweisen

$$A + B = \{v \in V : \exists a \in A, \exists b \in B \text{ mit } v = a + b\}$$

$$\lambda A = \{v \in V : \exists a \in A \text{ mit } v = \lambda a\}$$

Beispiele.

1) (triviale Untervektorräume)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und setze $W = \{0\}$. Dann gilt offenbar $V \triangleleft V$ und $W \triangleleft V$.

W heißt der **Nullvektorraum** und besteht nur aus dem Nullvektor von V .

2) Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und seien $v, w \in V$.

Dann sind $\mathbb{K}v \triangleleft V$ und $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w \triangleleft V$.

Beweis: (für $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w \triangleleft V$)

Seien $u_1, u_2 \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ mit $u_1 = \lambda_1 v + \mu_1 w$ und $u_2 = \lambda_2 v + \mu_2 w$. Daraus folgt offenbar, dass $u_1 + u_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)v + (\mu_1 + \mu_2)w \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$.

Weiters ist $\lambda u_1 = (\lambda \lambda_1)v + (\lambda \mu_1)w \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$. \square

(Zur geometrischen Veranschaulichung: sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Dann ist $\mathbb{R}v$ eine Gerade durch den Ursprung.

Ist $V = \mathbb{R}^3$ und sind v, w linear unabhängig (siehe später), dann ist $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ eine Ebene durch den Ursprung.)

3) Seien

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist differenzierbar}\}$$

Dann gilt: $\mathbb{P}_n \triangleleft \mathcal{D}(\mathbb{R}) \triangleleft \mathcal{C}(\mathbb{R}) \triangleleft \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(Beweis siehe LV Differenzialrechnung)

Als nächstes untersuchen wir das Verhalten von Untervektorräumen bei der Bildung von Durchschnitten und Vereinigungen.

Satz. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, und für alle $i \in I$ (I ... Indexmenge) sei $W_i \triangleleft V$. Dann gilt $W = \bigcap_{i \in I} W_i \triangleleft V$.

(D.h. Der Durchschnitt beliebig (!) vieler Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum.)

Beweis. Für jedes $i \in I$ ist $0 \in W_i$ und damit $0 \in W \neq \emptyset$.

Seien $v, w \in W$. Für jedes $i \in I$ gilt dann: $v, w \in W_i$ und damit auch $v + w \in W_i$. Somit $v + w \in W$.

Sei $v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für jedes $i \in I$ gilt dann: $v \in W_i$ und damit auch $\lambda v \in W_i$. Somit $\lambda v \in W$. \square

Bemerkung. Sei $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge des \mathbb{K} -Vektorraums V . Dann können wir $\mathcal{W} = \{W \triangleleft V : S \subseteq W\}$ (i.e. die Familie aller Untervektorräume, welche S enthalten) betrachten.

Dann ist $W^* = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W$ mit obigem Satz ein Untervektorraum, und offenbar der **kleinste** Untervektorraum, welcher S enthält.

W^* heißt auch **der von S erzeugte Untervektorraum** und wird auch

mit $[S]$ bezeichnet. Im Falle von $S = \emptyset$ ist $[S]$ offenbar der triviale Untervektorraum.

Bezüglich der Bildung von Vereinigungen beobachten wir zuerst:

Die Vereinigung von (sogar nur) zwei Untervektorräumen ist im allgemeinen **kein** Untervektorraum.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $v = (1, 0) \in V$ und $w = (0, 1) \in V$.

Wie zuvor erwähnt, sind dann $W_1 = \mathbb{R}v \triangleleft V$ und $W_2 = \mathbb{R}w \triangleleft V$.

Es sind $v, w \in W_1 \cup W_2$, aber $v + w = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$.

Sind jedoch zusätzliche (!) Bedingungen erfüllt, dann ist die Vereinigung von Untervektorräumen wieder ein Untervektorraum.

Satz. 1) Sei $W_i \triangleleft V \ \forall i \in I$, sodass für je zwei $i, j \in I$ gilt, dass $W_i \subseteq W_j$ oder $W_j \subseteq W_i$.

Dann ist $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ ein Untervektorraum von V .

2) Seien $W_1, W_2 \triangleleft V$ und gelte $W_1 \cup W_2 \triangleleft V$. Dann ist $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

Beweis.

zu 1): Seien $v, w \in W$. Dann $\exists i, j \in I$ mit $v \in W_i$ und $w \in W_j$.

Ist $W_i \subseteq W_j$, dann gilt $v, w \in W_j \Rightarrow v + w \in W_j \subseteq W$.

Ist $W_j \subseteq W_i$, dann gilt $v, w \in W_i \Rightarrow v + w \in W_i \subseteq W$. In beiden Fällen ist $v + w \in W$.

Ist $v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gibt es ein $i \in I$ mit $v \in W_i$. Damit gilt auch $\lambda v \in W_i \subseteq W$.

zu 2): Annahme: Gelte $W_1 \not\subseteq W_2$ noch $W_2 \not\subseteq W_1$.

Dann existieren $v \in W_1, v \notin W_2$ und $w \in W_2, w \notin W_1$.

Weil $v, w \in W_1 \cup W_2$ und $W_1 \cup W_2 \triangleleft V$, gilt $v + w \in W_1 \cup W_2$.

Fall 1 : $v + w \in W_1$. Weil $-v \in W_1$ gilt dann $(-v) + v + w = w \in W_1$, ein Widerspruch.

Fall 2 : $v + w \in W_2$. Weil $-w \in W_2$ gilt dann $v + w + (-w) = v \in W_2$, ein Widerspruch.

Somit gilt $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$. \square

Satz. Seien $U, W \triangleleft V$. Dann ist $U + W \triangleleft V$.

Beweis. Seien $v_1, v_2 \in U + W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in W$ mit $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$.

Folglich ist $v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$ und

$\lambda v_1 = (\lambda u_1) + (\lambda w_1) \in U + W$. \square

Bemerkung. $U + W$ heißt die **Summe** der Untervektorräume U, W .

Auf analoge Weise kann auch die Summe $U_1 + U_2 + \dots + U_k \triangleleft V$ von k Untervektorräumen U_1, U_2, \dots, U_k gebildet werden.