Euklidische und unitäre Vektorräume

In allgemeinen Vektorräumen gibt es keine Möglichkeit der Längenmessung von Vektoren und der Winkelmessung zwischen zwei Vektoren. Dafür ist eine zusätzliche Struktur erforderlich.

Im folgenden ist wie üblich $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, zu $\lambda \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\overline{\lambda}$ die zu λ konjugiert komplexe Zahl und zu einer Matrix $A = (a_{ij})$ bezeichnet $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ die zu A konjugiert komplexe Matrix. Die transponierte Matrix von A bezeichnen wir mit A^T .

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt **Bilinearform**, wenn für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

- $s(v_1 + v_2, v_3) = s(v_1, v_3) + s(v_2, v_3) \quad , \quad s(\lambda v_1, v_2) = \lambda s(v_1, v_2)$
- $s(v_1, v_2 + v_3) = s(v_1, v_2) + s(v_1, v_3) \quad , \quad s(v_1, \lambda v_2) = \lambda s(v_1, v_2)$

Bemerkung. Man sagt auch, eine Bilinearform ist "linear in jeder Komponente", weil für jedes feste $w \in V$ die Abbildung $s(\,\cdot\,, w) : V \to \mathbb{K}$ mit $v \mapsto s(v, w)$ linear ist.

Ebenso ist für jedes feste $v \in V$ die Abbildung $s(v, \,\cdot) : V \to \mathbb{K}$ mit $w \mapsto s(v, w)$ linear.

Bemerkung. Eine Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt **symmetrisch**, wenn $s(v_1, v_2) = s(v_2, v_1) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$ gilt.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $s(v, w) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ für $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = (y_1, \ldots, y_n)$.

Dann ist s eine symmetrische Bilinearform.

Im Falle von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ergeben sich diverse Feinheiten. Man sagt, eine Abbildung $F : V \to W$ ist **semi-linear**, wenn

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) \quad \text{und} \quad F(\lambda v_1) = \overline{\lambda} F(v_1)$$

$s : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt **Sesquilinearform** wenn die Abbildung $v \mapsto s(v, w)$ semi-linear ist für jedes feste $w \in V$, und die Abbildung $w \mapsto s(v, w)$ linear ist für jedes feste $v \in V$.

Eine Sesquilinearform $s : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt **Hermitesche Form**, wenn $s(v, w) = \overline{s(w, v)}$.

Man beachte, dass dabei $s(v, v) \in \mathbb{R} \quad \forall\, v \in V$.

Bemerkung. In der Literatur wird eine Sesquilinearform oft auch so definiert, dass sie linear in der ersten Komponente und semi-linear in der zweiten Komponente ist.

$s : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt **nicht ausgeartet** wenn

$$s(v, w) = 0 \quad \forall\, w \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \text{und}$$

$$s(v, w) = 0 \quad \forall\, v \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

Definition. Eine symmetrische Bilinearform (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. eine Hermitesche Form (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt **positiv definit**, wenn

$$s(v, v) > 0 \quad \forall\, v \neq 0$$

Beispiel. Zu $V = \mathbb{K}^n$ und $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = (y_1, \ldots, y_n)$ ist

$$s(v, w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

bilinear, symmetrisch, nicht ausgeartet und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ positiv definit.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{K}^n$ und A eine $n \times n$ Matrix.

Betrachte $s : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $s(v, w) = v^T A w$.

(wobei v und w als Spaltenvektoren aufgefasst werden)

Man kann zeigen, dass s symmetrisch ist, wenn A eine symmetrische

Matrix ist, i.e. wenn $A^T = A$.

Beachte weiters, dass $e_i^T A e_j = a_{ij}$ ist wenn e_i, e_j kanonische Einheitsvektoren sind.

Beispiel. Sei $V = C([a,b])$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stetigen reellwertigen Funktionen.

Dann ist $s(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ symmetrisch, nicht ausgeartet und positiv definit.

Defintion. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. eine Hermitesche Form (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $<\ ,\ >: V \times V \to \mathbb{K}$ heißt ein **Skalarprodukt** in V .

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **euklidischer Vektorraum**, ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **unitärer Vektorraum**.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt also

- $\langle v, v\rangle \geq 0$, $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$, $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$
- $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ haben wir

- $\langle v, v\rangle \geq 0$, $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$, $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$
- $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$

Bemerkung. Mit dieser Definition gilt dann $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

Man beachte, dass in der Literatur auch die Definition mit $\langle v, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$ (statt $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$), wodurch sich in den grundlegenden

Aussagen allerdings keine Änderungen ergeben.

Beispiel. Das **kanonische Skalarprodukt** im $\mathbb{R}^n$ ist

$$\langle v, w\rangle = v^T w = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Das **kanonische Skalarprodukt** im $\mathbb{C}^n$ ist

$$\langle v, w\rangle = \overline{v}^T w = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \overline{x_1} y_1 + \ldots + \overline{x_n} y_n$$

Beispiel. Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $V = \{f : I \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ stetig}\}$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b \overline{f(x)}g(x)dx$ ein Skalarprodukt.

Definition. Eine beliebige $n \times n$ Matrix heißt **symmetrisch**, wenn $A^T = A$.

Eine komplexe $n \times n$ Matrix heißt **Hermitesch**, wenn $\overline{A}^T = A$.

(Eine reelle symmetrische Matrix ist, als komplexe Matrix aufgefasst, also auch Hermitesch)

Beispiele.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch und Hermitesch

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3+2i \\ 3-2i & -6 \end{pmatrix}$ ist nicht symmetrisch aber Hermitesch

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch aber nicht Hermitesch

Bemerkung.

Die Menge der symmetrischen Matrizen aus $M(n \times n; \mathbb{K})$ ist ein Untervektorraum von $M(n \times n; \mathbb{K})$.

Die Menge der Hermiteschen Matrizen aus $M(n \times n; \mathbb{C})$ ist ein reeller, aber i.a. kein komplexer Unterraum von $M(n \times n; \mathbb{C})$.

Bemerkung.

Ist $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ symmetrisch, dann ist $\langle v, w \rangle = v^T A w$ eine symmetrische Bilinearform $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ist $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ Hermitesch, dann ist $\langle v, w \rangle = \overline{v}^T A w$ eine Hermitesche Form $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

Sei nun V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. eine Hermitesche Form (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Wählen wir eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ in V dann heißt

$$M_{\mathcal{B}}(s) = (s(v_i, v_j))$$

die **darstellende Matrix** von s bzgl. $\mathcal{B}$.

Bemerkung. Gilt $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ und $w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ dann zeigt elementare Ausrechnung dass

$$s(v, w) = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) M_{\mathcal{B}}(s) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $M_{\mathcal{B}}(s)$ eine symmetrische Matrix, im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine Hermitesche Matrix.

Beispiel. Wählen wir in $V = \mathbb{K}^n$ die kanonische Basis $\mathcal{K}$ und das kanonische Skalarprodukt, dann erhalten wir als darstellende Matrix die Einheitsmatrix, also insbesondere eine Diagonalmatrix.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^3$, also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Betrachte $s(x,y) = x_1y_1 + x_2(y_2+y_3) + x_3(y_2+y_3)$

Mit $\mathcal{B} = ((1,1,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (1,1,1))$ ergibt sich

$s(v_1,v_1) = 2\ ,\ s(v_1,v_2) = 1$ etc. und insgesamt

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hat man zwei Basen $\mathcal{A} = (v_1,\ldots,v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1,\ldots,w_n)$ gegeben und setzt man $A = M_{\mathcal{A}}(s)$ und $B = M_{\mathcal{B}}(s)$, dann gilt die

Transformationsformel $\quad A = \overline{S}^T BS$

wobei S^{-1} die $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ zugeordnete Matrix ist, d.h. die j-te Spalte von S^{-1} ist der Koordinatenvektor von w_j bzgl. $\mathcal{A}$.

Man überlege sich in diesem Zusammenhang auch dass

$$(\overline{S}^T)^{-1} = \overline{S^{-1}}^T\ .$$