Beispiele zu Lineare Algebra - VO

1. Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $U = V \times W$. Man betrachte folgende Operationen auf U

   $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$

   $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$

   Man zeige, dass dann U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Man bestimme das neutrale Element von U und das inverse Element zu (v, w) .

2. Sei $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (3, 0, 1, 6)$, $v_3 = (0, 1, 1, -1)$.

   Ist $w = (-2, -3, 4, 0) \in W$?

3. Man untersuche, ob die Vektoren $v_1 = (1, 0, -1, 1, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2, 3)$, $v_3 = (1, 1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^5$ linear unabhängig sind.

4. Man untersuche, ob die Vektoren $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (i, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1+i) \in \mathbb{C}^3$ linear unabhängig sind.

5. Mit $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ bestimme man einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ so, dass die Vektoren u_1 , u_2 , w linear unabhängig sind.

6. Man bestimme eine Basis von $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, wobei $v_1 = (2, 6, 0, 1, 3)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1, 4)$, $v_3 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $v_4 = (0, 4, 0, 3, -5) \in \mathbb{R}^5$.

7. Man bestimme eine Basis von $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \mathbb{P}_3$, wobei

   $v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, $v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$, $v_3 = t^3 + 6t - 5$, $v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

8. Man bestimme den Koordinatenvektor von $v = (4, -3, 2) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = ((1, 1, 1)\ ,\ (1, 1, 0)\ ,\ (1, 0, 0))$.

9. Man bestimme den Koordinatenvektor von $v = 2 - 3t + 6t^2 \in \mathbb{P}_2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1 + t + t^2\ ,\ 1 + t\ ,\ 1)$.

10. Man bestimme den Zeilenrang von $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

11. Von der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass $F(1,1,1) = 3$, $F(0,1,-2) = 1$, $F(0,0,1) = -2$. Man bestimme $F(x_1, x_2, x_3)$.

12. Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ durch $F(i,2) = (3, 1+i)$, $F(i,0) = (1,0)$. Man bestimme die Bilder der Vektoren $(1,0)$ und $(0,1)$ unter F .

13. Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch $F(x,y,z) = (x + 2y - z, x + y - 2z)$.

    Bestimme Basis und Dimension von $\mathrm{Im}F$ und $\mathrm{Ker}F$.

14. Gegeben sei $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit $F(z_1, z_2) = (-iz_2, iz_1)$.

    Bestimme Basen von $\mathrm{Im}F$ und $\mathrm{Ker}F$.

15. Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ sei gegeben durch

    $F(1,0,1) = (0,1,0,2,0)$, $F(0,-1,2) = (-1,6,2,0,1)$, $F(1,1,2) = (2,-3,1,4,0)$.

    Man bestimme $F(e_i)$, $i = 1,2,3$ und $F(x_1, x_2, x_3)$ sowie die darstellende Matrix von F wenn in beiden Vektorräumen die kanonische Basis gewählt wird.

16. $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ seien Basen der Vektorräume V bzw. W .

    Die lineare Abbildung $F : V \to W$ sei gegeben durch

    $F(v_1) = w_2 + 2w_3$, $F(v_2) = 3w_1 + 4w_2 + 5w_3$, $F(v_3) = 6w_1 + 7w_2 + 8w_3$.

    Man bestimme $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$, $\mathrm{Ker}F$, $\mathrm{Im}F$ und untersuche, ob F surjektiv bzw. injektiv ist.

17. Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

    $F(x,y,z) = (3x + 2y - 4z\ ,\ x - 5y + 3z)$ gegeben.

    Man bestimme $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ für $\mathcal{A} = ((1,1,1)\ ,\ (1,1,0)\ ,\ (1,0,0))$ und $\mathcal{B} = ((1,3)\ ,\ (2,5))$.

    Des weiteren bestimme man jeweils eine Basis von $\mathrm{Ker}F$ und $\mathrm{Im}F$.

18. Man bestimme - falls möglich - die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 18 \end{pmatrix}$.

19. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ invertierbar. Man bestimme in diesem Fall A^{-1} .

20. Gegeben sei der Vektorraum V mit den Basen $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ wobei

    $w_1 = v_1 + v_2 - v_3$, $w_2 = v_1 - v_2 + v_3$, $w_3 = -v_1 + v_2 + v_3$.

    Man bestimme die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

21. $\mathcal{A} = (1 + t \ , \ t + t^2 \ , \ 1 + t^2)$ und $\mathcal{B} = (1 \ , \ 1 + t \ , \ 1 + t + t^2)$ seien Basen des $\mathbb{P}_2$.

    Man bestimme die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

22. Man bestimme den Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = 0$ mit
    $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. Man bestimme den Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = b$ mit
    $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

24. Man bestimme jene $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $Ax = b$ mit
    $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & \alpha & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
    (a) eindeutig lösbar , (b) lösbar ist.

25. Für welche $b \in \mathbb{R}^3$ besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ mit
    $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ eine Lösung ?

26. Man berechne $\det A$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) mittels Überführung von A in Zeilenstufenform und (b) mit dem Entwicklungssatz von Laplace.

27. Zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ bestimme man die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ und verifiziere, dass $\widetilde{A}A = \det A E_n$.

28. Unter Verwendung der Cramerschen Regel bestimme man alle $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & y & & & = & a \\ 3x & - & y & - & z & = & -10 \end{array}$$

eine Lösung mit $y = 1$ besitzt.

29. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender komplexwertiger Matrizen (d.h. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$

30. Man untersuche ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ für (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar ist.

31. Man untersuche, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist und transformiere sie gegebenenfalls auf Diagonalform (mittels $S^{-1}AS$) .

32. Man bestimme eine 2×2 Matrix A , deren Eigenwerte 1 und 4 sind und deren zugehörige Eigenvektoren $\vec{x}_I = (3, 1)$ und $\vec{x}_{II} = (2, 1)$ sind.