Lineare Abbildungen - I

Wir kommen nun zur Frage der "strukturverträglichen" Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen. Dies sind die linearen Abbildungen.

Definition. Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume (über demselben $\mathbb{K}$) .

Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt $\mathbb{K}$-**linear**, wenn

L1) $F(v + w) = F(v) + F(w) \quad \forall\, v, w \in V$

L2) $F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall\, v \in V \ , \ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$.

Man sieht leicht, dass die Bedingungen L1) und L2) gleichbedeutend sind mit

L) $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \quad \forall\, v, w \in V \ , \ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Mittels vollständiger Induktion kann man dann zeigen, dass aus der Linearität von $F : V \to W$ folgt, dass

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + ... + \lambda_n F(v_n)$$

gilt für $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

In anderen Worten: Eine lineare Abbildung führt eine Linearkombination von Vektoren in V in die entsprechende Linearkombination der Bildvektoren über.

Grundlegende Eigenschafen. Sei $F : V \to W$ linear.

- $F(0) = 0 \ , \quad F(v - w) = F(v) - F(w) \quad \forall\, v, w \in V$

Beweis: Wähle $v \in V$. Wegen $0 = 0 \cdot v$ gilt dann $F(0) = F(0 \cdot v) = 0 \cdot F(v) = 0$. Weiters ist $F(v - w) = F(v + (-1)w) = F(v) + (-1)F(w) = F(v) - F(w)$.

- (v_i) linear abhängig in $V \Rightarrow (F(v_i))$ linear abhängig in W

Beweis: folgt sofort aus
$\lambda_1 v_{i_1} + ... + \lambda_k v_{i_k} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 F(v_{i_1}) + ... + \lambda_k F(v_{i_k}) = F(0) = 0$.

• $(F(v_i))$ linear unabhängig in $W \;\Rightarrow\; (v_i)$ linear unabhängig in V

Beweis: folgt sofort aus der vorigen Aussage.

• $U \lhd V \quad \Rightarrow \quad F(U) \lhd W$

Beweis: Seien $w_1, w_2 \in F(U)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann existieren $v_1, v_2 \in U$ mit $F(v_1) = w_1$ und $F(v_2) = w_2$. Nun gilt $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in F(U)$, weil $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$.

D.h. das Bild eines Untervektorraumes ist wieder ein Untervektorraum.

• $Y \lhd W \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(Y) \lhd V$

Beweis: Seien $v_1, v_2 \in F^{-1}(Y)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann gilt $F(v_1), F(v_2) \in Y$ und damit auch $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) \in Y$. Dies bedeutet aber, dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F^{-1}(Y)$.

D.h. das Urbild eines Untervektorraumes ist wieder ein Untervektorraum.

• $\dim F(V) \leq \dim V$

Beweis: folgt unmittelbar aus der dritten Aussage.

• Man beachte weiters, dass aus der linearen Unabhängigkeit von (v_i) i.a. **nicht** folgt, dass $(F(v_i))$ linear unabhängig ist (siehe Nullabbildung).

Beispiele.

1) Die **Nullabbildung** $F : V \to W$ mit $F(v) = 0 \;\; \forall\, v \in V$ ist linear.

2) Die **identische Abbildung** $F : V \to V$ mit $F(v) = v \;\; \forall\, v \in V$ ist linear.

3) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ fest. Dann ist die Abbildung $F : V \to V$ mit $F(v) = \lambda \cdot v$

linear.

4) Sei X eine beliebige Menge, $V = \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$ und $\varphi : X \to X$ eine beliebige Abbildung.

Dann ist $F : V \to V$ mit $F(f) = f \circ \varphi$ linear.

5) Die Abbildung $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f \to f'$ ist linear.

6) Für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f \to f(x_0)$ linear.

Eine Schreibweise. : Für $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ setzen wir

$$\langle v, w\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j \in \mathbb{K}$$

Dann sind offenbar folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\langle v, 0\rangle = 0 \quad , \quad \langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{K}^n$
- $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle \quad \forall\, v, v', w \in \mathbb{K}^n$
- $\langle \lambda v, w\rangle = \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{K}^n \;,\; \lambda \in \mathbb{K}$

Mit dieser Notation können nun folgende wichtige Beispiele für lineare Abbildungen angegeben werden.

1) Für jedes feste $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ ist die Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $F(v) = \langle v, w\rangle$ linear.

Beispiel. $w = (1, 3 - 2) \quad \Rightarrow \quad F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 - 2x_3$

2) Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Wir wollen damit eine Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definieren.

Für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sei

$$F(v) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j) = (\langle a_1, v\rangle, \langle a_2, v\rangle, \ldots, \langle a_m, v\rangle)$$

wobei $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Zeilenvektoren von A bezeichnen.

Dann ist $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear und somit kann jeder $m \times n$ Matrix auf natürliche Weise eine lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ zugeordnet werden!

$F(v + v') = (\langle a_1, v + v' \rangle, \langle a_2, v + v' \rangle, \ldots, \langle a_m, v + v' \rangle) =$

$(\langle a_1, v \rangle + \langle a_1, v' \rangle, \langle a_2, v \rangle + \langle a_2, v' \rangle, \ldots, \langle a_m, v \rangle + \langle a_m, v' \rangle) =$

$(\langle a_1, v \rangle, \ldots, \langle a_m, v \rangle) + (\langle a_1, v' \rangle, \ldots, \langle a_m, v' \rangle) = F(v) + F(v')$

$F(\lambda v) = (\langle a_1, \lambda v \rangle, \langle a_2, \lambda v \rangle, \ldots, \langle a_m, \lambda v \rangle) =$

$(\lambda \langle a_1, v \rangle, \lambda \langle a_2, v \rangle, \ldots, \lambda \langle a_m, v \rangle) = \lambda(\langle a_1, v \rangle, \ldots, \langle a_m, v \rangle) = \lambda F(v)$

$$v = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto F(v) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, also $m = 2$ und $n = 3$. Die dadurch gelieferte lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist dann

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$$

3) Sei nun $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear und $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$.

Für $j = 1, \ldots, n$ sei $F(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$. Wir bilden damit eine $m \times n$-Matrix A , wobei die j-te Spalte von A gleich $F(e_j)$ ist.

Damit kann einer linearen Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ auf natürliche Weise eine $m \times n$ Matrix A zugeordnet werden.

Für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ und damit

$F(v) = x_1 F(e_1) + \ldots + x_n F(e_n) =$

$x_1(a_{11}, ..., a_{m1}) + x_2(a_{12}, \ldots, a_{m2}) + \ldots + x_n(a_{1n}, \ldots, a_{mn}) =$

$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)$

Dies bedeutet aber, dass die dieser Matrix A nach 2) zugeordnete lineare Abbildung genau jene Abbildung ist, von der wir gestartet sind!

Zur Bestimmung von linearen Abbildungen $F : V \to W$ ist folgende Aussage von Bedeutung, welche besagt, dass eine lineare Abbildung bereits dadurch eindeutig bestimmt ist, wenn die Bilder von Basisvektoren bekannt sind.

Satz. Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis in V und $(w_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie in W .

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit der Eigenschaft $F(v_i) = w_i \quad \forall\ i \in I$.

Beweis. (Verwende die Schreibweise $v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i$)

i) **Eindeutigkeit:**

Seien $F, G : V \to W$ mit $F(v_i) = G(v_i) = w_i \quad \forall\ i \in I$. Für $v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i$ gilt dann $F(v) = F(\sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i F(v_i) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i w_i = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i G(v_i) = G(\sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i) = G(v)$.

Also ist $F = G$.

ii) **Existenz:**

Sei $v \in V$. Dann ist $v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i$. Definiere nun $F(v) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i w_i$.

Für $v, v' \in V$ seien $v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i$ und $v' = \sum\limits_{i\in I} \mu_i v_i$.

Dann ist $v+v' = \sum\limits_{i\in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i$ und damit $F(v+v') = F(\sum\limits_{i\in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i) = \sum\limits_{i\in I} (\lambda_i + \mu_i) w_i = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i w_i + \sum\limits_{i\in I} \mu_i w_i = F(v) + F(v')$.

Analog zeigt man, dass $F(\lambda v) = \lambda F(v)$.

F ist somit linear und hat offenbar die Eigenschaft, dass $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$. $\square$

Bemerkung. Ist $\dim V = n$ und $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von V , $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ eine beliebige Familie aus W , dann gilt für $v \in V$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ damit $F(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$.

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt weiters

a) $F(V) = \mathrm{Span}(w_i)$

b) F ist injektiv $\Leftrightarrow$ (w_i) ist linear unabhängig

Beweis.
zu a) : Offenbar ist $F(V) \subseteq \mathrm{Span}(w_i)$.

Sei nun $w \in \mathrm{Span}(w_i)$, etwa $w = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i$. Setze $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \in V$. Dann ist $F(v) = w$, also ist auch $\mathrm{Span}(w_i) \subseteq F(V)$ und damit $F(V) = \mathrm{Span}(w_i)$.

zu b) :
" $\Rightarrow$ " : Sei $\lambda_1 w_{i_1} + \ldots + \lambda_r w_{i_r} = 0$. Setze $v = \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_r v_{i_r}$. Dann ist $F(v) = 0$. Weil F injektiv ist und bereits $F(0) = 0$ ist, muß $v = 0$ sein. Weil $(v_{i_1}, ..., v_{i_r})$ linear unabhängig ist, muß $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ sein. Also ist (w_i) linear unabhängig.

" $\Leftarrow$ " : Sei $F(v) = 0$ und $v = \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_r v_{i_r}$. Dann ist $\lambda_1 w_{i_1} + \ldots + \lambda_r w_{i_r} = 0$, und laut Voraussetzung folgt damit $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$. Somit gilt $v = 0$.

Ist nun $F(v) = F(v')$, dann $F(v - v') = 0$ und somit $v - v' = 0$ bzw. $v = v'$. Dies heißt, dass F injektiv ist. $\square$

Beispiel. Sei $V = W = \mathbb{R}^2$.

$v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (0, 1)$ bilden eine Basis von V . Sei $w_1 = (2, -3)$, $w_2 = (1, 2)$.

Dann gibt es gemäß vorher genau eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

mit $F(v_1) = w_1$ und $F(v_2) = w_2$.

Frage: Was ist $F(v)$ für ein beliebiges $v \in V$?

Sei $v = (x_1, x_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$.

Dann gilt $\lambda_1 = x_1$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = x_2$ bzw. $\lambda_2 = x_2 - x_1$.

$F(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, also $F(x_1, x_2) = x_1(2, -3) + (x_2 - x_1)(1, 2) = (x_1 + x_2, -5x_1 + 2x_2)$.