Lineare Abbildungen und Matrizen

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$.

Im folgenden wollen wir jeder $m{\times}n$ Matrix eine lineare Abbildung $V \to W$ zuordnen, und umgekehrt jeder linearen Abbildung $V \to W$ eine $m \times n$ Matrix, sodass wir einen Isomorphismus $M(m \times n; \mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ erhalten.

Ein derartiger gesuchter Isomorphismus ist allerdings nicht kanonisch gegeben. Wir müssen zuerst in beiden Vektorräumen Basen wählen, und der Isomorphismus wird dann von den gewählten Basen abhängen.

Wichtig: Für das Folgende fixieren wir nun eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von V , und eine Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ von W .

I. Die einer Matrix zugeordnete lineare Abbildung

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Wir definieren eine lineare Abbildung $F : V \to W$ durch Angabe der Bilder der Basisvektoren.

$$F(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m$$

$$F(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m$$

$$\ldots$$

$$F(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m$$

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $(m = 2\ ,\ n = 3)$ liefert $F : V \to W$ mit

$$F(v_1) = w_1 + 2w_2\ ,\ F(v_2) = 3w_1\ ,\ F(v_3) = -w_1 + 4w_2\ .$$

Setzen wir $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) = F$, dann ist durch diese Vorgangsweise eine Abbildung $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : M(m \times n; \mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ erklärt.

Spezialfall. (siehe vorher) Seien $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ und $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$

die kanonischen Basen in $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$.

Für $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ ist dann

$F(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$

$F(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$

$\ldots$

$F(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$

D.h. $F(e_j)$ ist die j-te Spalte von A .

Für ein beliebiges $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt somit

$F(x) = F(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 F(e_1) + \ldots + x_n F(e_n) =$

$x_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) + \ldots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) =$

$(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \ , \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \ , \ldots , \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)$.

Werden nun $x \in \mathbb{K}^n$ und $F(x) = L^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'}(A)(x)$ als Spaltenvektoren geschrieben, dann kann x als $n \times 1$ Matrix, $F(x)$ als $m \times 1$ Matrix aufgefaßt werden, und es gilt mit $y = F(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ die Beziehung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

wobei auf der rechten Seite die Multiplikation von Matrizen auftritt!

Aus diesem Grund verwendet man auch die Schreibweise

$F(x) = L^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'}(A)(x) = Ax$.

Beispiel.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3; \mathbb{R})$. A definiert $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x) = F((x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} .$$

Im speziellen ist etwa $F((1,1,1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(**Ende des Spezialfalles**)

Zurück zum allgemeinen Fall.

Seien nun $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \to V$ und $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^m \to W$ die durch $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ definierten Koordinatensysteme in V bzw. W .

Die zentrale Aussage ist nun die, dass das folgende Diagramm **kommutativ** ist, d.h.

$$\Phi_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A) = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \to W \ .$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)"'] & W \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Dann ist

$L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)(x) = Ax = (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \ , \ldots , \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)$ und

$\Phi_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)(x) = \Phi_{\mathcal{B}}(Ax) = (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)w_1 + \ldots + (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)w_m$.

Andererseits ist $\Phi_{\mathcal{A}}(x) = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ und (mit $F = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$)

$L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + \ldots + x_nF(v_n) =$

$x_1(a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m) + \ldots + x_n(a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m) =$

$(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)w_1 + \ldots + (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)w_m$. $\square$

Dies bedeutet: Mit $F = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ sei x der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. $\mathcal{A}$. Dann ist $y = Ax$ der Koordinatenvektor von $F(v)$ bzgl. $\mathcal{B}$.

Bemerkung. $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ heißt die der Matrix A bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ **zugeordnete lineare Abbildung** $V \to W$.

Gilt $V = W$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, dann schreibt man statt $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ auch $L_{\mathcal{B}}$.

II. Die einer linearen Abbildung zugeordnete Matrix

Sei nun $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Für jedes $j = 1, 2, \ldots, n$ gibt es dann eindeutig bestimmte Skalare $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ sodass

$$F(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \ldots + a_{mj}w_m \ .$$

Auf diese Weise wird eine Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij})$ definiert bzw. eine Abbildung

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to M(m \times n; \mathbb{K}) \quad , \quad F \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$$

Man beachte, dass die j-te Spalte von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ der Koordinatenvektor von $F(v_j)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ ist.

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ heißt die der linearen Abbildung F bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ **zugeordnete Matrix** (bzw. die **darstellende Matrix** von F bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$) .

Ist $v \in V$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v (bzw. $F(v)$) bzgl. $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{B}$), dann gilt $y = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot x$.

Beweis. $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \quad \Rightarrow \quad F(v) = x_1F(v_1) + \ldots + x_nF(v_n) =$

$x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m) + \ldots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m) =$
$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)w_1 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)w_m$.

Damit ist $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. $\square$

Satz. Die Abbildung

$$L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : M(m \times n; \mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \quad , \quad A \mapsto L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$$

ist ein Isomorphismus, dessen Umkehrabbildung durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to M(m \times n; \mathbb{K}) \quad , \quad F \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$$

gegeben ist.

Beweis. Wir setzen $L = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ und $M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

i) L ist linear.

Seien $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Zu $v \in V$ sei x der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{A}$.

$L(\lambda A + \mu B)(v) = L(\lambda A + \mu B) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) = \Phi_{\mathcal{B}}((\lambda A + \mu B)x) =$

$\Phi_{\mathcal{B}}(\lambda Ax + \mu Bx) = \lambda \Phi_{\mathcal{B}}(Ax) + \mu \Phi_{\mathcal{B}}(Bx) =$

$\lambda L(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) + \mu L(B) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) = \lambda L(A)(v) + \mu L(B)(v) =$

$(\lambda L(A) + \mu L(B))(v)$.

Dies gilt für jedes $v \in V$ und somit $L(\lambda A + \mu B) = \lambda L(A) + \mu L(B)$.

ii) L ist bijektiv.

Für $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ gilt: die j-te Spalte von $M(L(A))$ ist der Koordinatenvektor von $L(A)(v_j)$ bzgl. $\mathcal{B}$. Dies ist aber die j-te Spalte von A .

Damit gilt: $M \circ L(A) = A$ bzw. $M \circ L = \mathrm{id}_{M(m \times n; \mathbb{K})}$.

Für $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $v \in V$ gilt:

$L(M(F))(v) = L(M(F)) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) = \Phi_{\mathcal{B}}(M(F)x) = F(v)$.

Also $L \circ M(F) = F$ bzw. $L \circ M = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)}$.

Damit ist L ein Isomorphismus. $\square$

Beispiele.

1) Sei $V = \mathbb{P}_1$ mit Basis $\mathcal{A} = (1, t)$, $W = \mathbb{P}_2$ mit Basis $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$.

Wir suchen $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir wissen: Ist x der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. $\mathcal{A}$, dann ist Ax der Koordinatenvektor von $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v)$ bzgl. $\mathcal{B}$.

Also, mit $v = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t$ und $Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

gilt $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v) = (x_1 - x_2) \cdot 1 + 2x_1 \cdot t + (x_1 + 2x_2) \cdot t^2$.

Speziell, etwa für $v = 1 - t$, also $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ergibt sich damit

$$L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v) = 2 + 2t - t^2 \ .$$

2) Sei $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ eine Basis von $W = \mathbb{R}^2$.

Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(v_1) = w_1 + w_2 \ , \ F(v_2) = 2w_1 + w_2 \ , \ F(v_3) = 2w_1 - w_2 \ .$$

Dann ist die darstellende Matrix von F bzgl. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ offenbar gegeben durch

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Sei etwa $(4, 5, -3)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{A}$, also $v = 4v_1 + 5v_2 - 3v_3$.

Dann ist $F(v) = 4F(v_1) + 5F(v_2) - 3F(v_3) = 4(w_1 + w_2) + 5(2w_1 + w_2) - 3(2w_1 - w_2) = 8w_1 + 12w_2$.

Also ist der Koordinatenvektor von $F(v)$ bzgl. $\mathcal{B}$ gleich $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Beziehungsweise: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.

III. Komposition linearer Abbildungen

Seien V , V' , V'' $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ und weiters gelte $\dim V = n$, $\dim V' = m$, $\dim V'' = r$.

Wir betrachten lineare Abbildungen $F : V \to V'$, $G : V' \to V''$ und setzen $H = G \circ F : V \to V''$.

Frage. Was ist die darstellende Matrix von H bzgl. $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}''$?

Setze $A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(G)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto Ax"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "y \mapsto By"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}'}"'] & \mathbb{K}^r \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}''}"] \\ V \arrow[r, "F"] & V' \arrow[r, "G"] & V'' \end{tikzcd}$$

Für $v \in V$ sei x der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$, y der Koordinatenvektor von $F(v)$ bzgl. $\mathcal{B}'$, z der Koordinatenvektor von $G(F(v))$ bzgl. $\mathcal{B}''$.

Dann ist $z = By$ und mit $y = Ax$ folgt, dass $z = B(Ax) = (BA)x$.

Damit: $M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = BA = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(G) \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(F)$

D.h. die darstellende Matrix der Komposition von zwei linearen Abbildungen ist das Produkt der einzelnen darstellenden Matrizen.

Analog zeigt man für $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $B \in M(r \times m; \mathbb{K})$, dass

$$L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(BA) = L^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(B) \circ L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(A) \ .$$