

# Äquivalenz von Matrizen

Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Aus dem Vorhergehenden ist es naheliegend, dass sich bei Wahl verschiedener Basen für  $V$  bzw.  $W$  auch verschiedene darstellende Matrizen für  $F$  ergeben werden.

Wir befassen uns jetzt mit der Fragestellung, ob man zu  $F : V \rightarrow W$  geeignete Basen für  $V$  und  $W$  finden kann, sodass die darstellende Matrix von  $F$  "möglichst einfach" wird.

Seien also  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$  und  $F : V \rightarrow W$  linear.

Des weiteren seien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'$  zwei Basen von  $V$ , und  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  zwei Basen von  $W$ .

Wir setzen  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$  und  $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F)$ , und fragen, in welcher Weise  $A$  und  $B$  zusammenhängen.

Dazu betrachten wir das (kommutative) Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{K}^m \\
 \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\
 V & \xrightarrow{F} & W \\
 \Phi_{\mathcal{A}'} \uparrow & & \uparrow \Phi_{\mathcal{B}'} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(B)} & \mathbb{K}^m
 \end{array}$$

mit den Bezeichnungen

$$L(A) : x \mapsto y = Ax \quad , \quad L(B) : x' \mapsto y' = Bx'$$

$$(\Phi_{\mathcal{A}'})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : x \mapsto x' = Tx \quad , \quad (\Phi_{\mathcal{B}'})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} : y \mapsto y' = Sy$$

(  $T$  ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ ,  $S$  ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$  )

Also gilt  $x' = Tx$ ,  $y' = Sy$ ,  $y = Ax$ ,  $y' = Bx'$  und damit

$$Sy = Bx' = B(Tx) = (BT)x . \text{ Mit } y = Ax \text{ gilt dann}$$

$(SA)x = (BT)x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$  und damit  $SA = BT$ . Folglich

**Transformationsformel für darstellende Matrizen:**

$$B = SAT^{-1} .$$

Nun beantworten wir die Frage, was die "einfachste Form" einer darstellenden Matrix ist.

**Lemma.** Sei  $F : V \rightarrow W$  linear. Weiters gelte  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$  und  $\text{Rg}F = r$ .

Dann existieren Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  von  $V$  bzw.  $W$ , sodass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

**Beweis.** Sei  $(w_1, \dots, w_r)$  eine Basis von  $\text{Im}F$ . Ergänze diese Basis zu einer Basis  $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$  von  $W$ .

Im Beweis der Dimensionsformel wurde gezeigt, dass es dann eine Basis  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k)$  von  $V$  gibt mit

$$u_1, \dots, u_k \in \text{Ker}F, \quad F(v_i) = w_i \quad \text{für } i = 1, \dots, r, \quad r + k = n .$$

Damit gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} . \quad \square$$

**Bemerkung.** Ist  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ , dann hat die Abbildung  $x \mapsto Ax$  offenbar die Form  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ , ist also, geometrisch gesehen, die Projektion von  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  auf die ersten  $r$  Koordinaten.

**Bemerkung.** Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $G : V' \rightarrow V$  und  $H : W \rightarrow W'$  Isomorphismen.

Dann ist offenbar  $\text{Rg}F = \text{Rg}(H \circ F \circ G)$ .

Sei nun  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ ,  $S$  eine invertierbare  $m \times m$  Matrix und  $T$  eine invertierbare  $n \times n$  Matrix. Dann ist auch  $T^{-1}$  invertierbar.

Seien  $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ,  $L(S) : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$  und  $L(T^{-1}) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  die durch  $A$ ,  $S$  bzw.  $T^{-1}$  definierten linearen Abbildungen.

Dann sind  $L(S)$  und  $L(T^{-1})$  Isomorphismen, und es gilt

$$L(S) \circ L(A) \circ L(T^{-1}) = L(SAT^{-1}).$$

Mit der vorhergehenden Beobachtung ist damit

$$\text{Rg}L(SAT^{-1}) = \text{Rg}L(A).$$

**Dies heißt aber :** Spaltenrang  $A =$  Spaltenrang  $(SAT^{-1})$ .

**Ebenso gilt :** Zeilenrang  $A =$  Zeilenrang  $(SAT^{-1})$ .

(Zeilenrang  $A =$  Spaltenrang  ${}^tA =$  Spaltenrang  $(({}^tT^{-1})({}^tA)({}^tS)) =$   
Spaltenrang  ${}^t(SAT^{-1}) =$  Zeilenrang  $(SAT^{-1})$  . )

Damit können wir nun zeigen, dass Spaltenrang und Zeilenrang für jede Matrix stets übereinstimmen.

**Satz.** Sei  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ .

Dann gilt Zeilenrang  $A =$  Spaltenrang  $A$ .

**Beweis.**

Sei  $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  die durch  $A$  definierte lineare Abbildung.

Dann ist  $A$  die darstellende Matrix von  $L(A)$ , wenn in  $\mathbb{K}^n$  bzw.  $\mathbb{K}^m$  die kanonischen Basen gewählt werden.

Durch Wahl geeigneter anderer Basen hat  $L(A)$  eine darstellende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{siehe vorher}) .$$

Die Transformationsformel besagt, dass es invertierbare Matrizen  $S$  und  $T$  gibt mit  $B = SAT^{-1}$  .

Offensichtlich gilt  $\text{Zeilenrang } B = \text{Spaltenrang } B = r$  .

Damit ist auch  $\text{Zeilenrang } A = \text{Spaltenrang } A = r$  .  $\square$

Ohne Beweis sei noch eine Aussage angeführt, welche Auskunft über den Rang des Produktes von zwei Matrizen gibt.

### **Ungleichung von Sylvester.**

Sei  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$  und  $B \in M(n \times r; \mathbb{K})$  . Dann gilt

$$\text{Rg}A + \text{Rg}B - n \leq \text{Rg}(A \cdot B) \leq \min\{\text{Rg}A, \text{Rg}B\}$$

**Definition.** Seien  $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$  .

Dann heißt  $B$  **äquivalent zu**  $A$  ,  $B \sim A$  , wenn es invertierbare Matrizen  $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$  und  $T \in M(n \times n; \mathbb{K})$  gibt, sodass  $B = SAT^{-1}$  .

**Bemerkung.** Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf  $M(m \times n; \mathbb{K})$  . (Aufgabe !)

**Bemerkung.** Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt :

$$B \sim A \Rightarrow \text{Rg}A = \text{Rg}B .$$

D.h. Äquivalente Matrizen sind gleichrangig.

Das folgende Resultat besagt, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

**Satz.** Für  $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$  sind gleichwertig

- 1)  $B \sim A$ ,
- 2)  $\text{Rg}A = \text{Rg}B$ .

**Beweis.** Zu zeigen ist  $2) \Rightarrow 1)$ : Gelte also  $\text{Rg}A = \text{Rg}B = r$ .

Betrachte die lineare Abbildung  $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  mit  $L(A)(x) = Ax$ .  
Dann ist  $\text{Rg}L(A) = r$ .

Nun gibt es Basen  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{K}^n$  bzw.  $\mathbb{K}^m$  sodass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(L(A)) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  die lineare Abbildung, die durch  $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$  gegeben ist.

Damit erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{K}^m \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Dies wiederum bedeutet, dass  $A$  die darstellende Matrix der Abbildung  $F$  bzgl. der Koordinatensysteme  $(\Phi_{\mathcal{A}})^{-1}$  und  $(\Phi_{\mathcal{B}})^{-1}$  ist !!

Auf analoge Weise folgt, dass  $B$  die darstellende Matrix von  $F$  bzgl. geeigneter anderer Koordinatensysteme  $(\Phi_{\mathcal{A}'})^{-1}$  und  $(\Phi_{\mathcal{B}'})^{-1}$  ist.

Damit muß wegen der Transformationsformel  $B = SAT^{-1}$  gelten, also  $B \sim A$ .  $\square$

**Bemerkung.** Aus dem Vorhergehenden folgt u.a. :

jede Matrix  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$  ist zu einer  $m \times n$  Matrix  $B$  der Form  $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  äquivalent.