

Determinanten

Durch Bildung der Determinante wird einer **quadratischen (!)** Matrix eine gewisse Zahl zugeordnet. Die Determinante tritt besonders bei Fragen der Flächen- bzw. Volumsberechnung auf (siehe auch den Begriff der Jacobi-Determinante in der Analysis).

I. Permutationen

$\forall n > 0$ sei $S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} : \sigma \text{ ist bijektiv}\}$.

Dann ist S_n eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen (vgl. früher) und heißt **symmetrische Gruppe** (vom Index n).

Die Elemente von S_n heißen **Permutationen** (einer n -elementigen Menge).

S_n hat $n!$ Elemente und ist für $n \geq 3$ **nicht** abelsch (d.h. $\exists \sigma, \tau \in S_n$ mit $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$).

Schreibweisen :

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ für $\sigma \in S_n$

- $\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \end{pmatrix}$... identische Abbildung

- $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix} \text{ für } \sigma, \tau \in S_n$$

Beispiel. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\tau \in S_n$ heißt **Transposition**, wenn τ lediglich zwei Elemente vertauscht und die übrigen Elemente fest läßt.

Beispiel. $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ist eine Transposition.

Man kann zeigen, dass sich jede Permutation σ als Komposition von Transpositionen darstellen läßt. Bei jeder Darstellung von σ ist entweder eine gerade Anzahl von Transpositionen oder eine ungerade Anzahl von Transpositionen erforderlich.

Als **Vorzeichen** bzw. **Signum** einer Transposition τ setzt man

$$\text{sign } \tau = -1 .$$

Das **Vorzeichen** bzw. **Signum** einer beliebigen Permutation σ ist

$$\text{sign } \sigma = (-1)^k$$

wobei σ als Komposition von k Transpositionen dargestellt werden kann.

$\sigma \in S_n$ heißt **gerade**, wenn $\text{sign } \sigma = +1$ und **ungerade** wenn $\text{sign } \sigma = -1$.

Man kann weiters zeigen, dass für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ gilt

$$\text{sign } (\sigma_2 \circ \sigma_1) = \text{sign } \sigma_2 \cdot \text{sign } \sigma_1$$

II. Determinanten

Wir verwenden in diesem Zusammenhang die Schreibweise $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, wobei a_i den i -ten Zeilenvektor der $n \times n$ -Matrix A bezeichnet.

Definition. Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Bemerkung. Weil S_n $n!$ Elemente hat, treten für großes n sehr viele Summanden auf. Schon aus diesem Grund ist es wünschenswert, einfachere Berechnungsformeln für die Determinante zu bestimmen.

Bemerkung. Man verwendet auch die Schreibweise

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Im folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften der Determinante angeführt. Aus Zeitgründen wird auf die Beweise verzichtet.

- \det ist "linear in jeder Zeile", d.h. falls $a_i = a'_i + a''_i$ bzw. $a_i = \lambda a'''_i$, dann ist

$$\det \begin{pmatrix} \cdots \\ a_i \\ \cdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cdots \\ a'_i \\ \cdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \cdots \\ a''_i \\ \cdots \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cdots \\ a_i \\ \cdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \cdots \\ a'''_i \\ \cdots \end{pmatrix}$$

- $\det A = 0 \Leftrightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$ sind linear abhängig

Ist also im besonderen etwa $a_i = 0$ oder $a_i = a_j$ für $i \neq j$ dann gilt $\det A = 0$.

$\det A \neq 0$ bedeutet, dass A invertierbar ist !

- $\det E_n = +1$

- B entstehe aus A durch Vertauschen von zwei (verschiedenen) Zeilen $\Rightarrow \det B = -\det A$ (Vorzeichenwechsel !)

- B entstehe aus A durch Addition der λ -fachen j -ten Zeile zur i -ten Zeile ($i \neq j$) $\Rightarrow \det B = \det A$.

- Sei A eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix. Dann ist $\det A$ das Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen, i.e.

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} .$$

Führen wir also eine beliebige Matrix A in eine Matrix B in Zeilenstufenform über (B ist dann eine obere Dreiecksmatrix), dann ist

$$\det A = (-1)^k b_{11}b_{22} \dots b_{nn}$$

wobei k die Anzahl der verwendeten Zeilenvertauschungen ist.

- **(Determinantenproduktsatz)**

$$A, B \in M(n \times n; \mathbb{K}) \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Ist A invertierbar, also $AA^{-1} = E_n$, dann ist

$$+1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} , \text{ also } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} .$$

- $\det A = \det({}^t A)$

- Ist A eine "Block-Matrix" der Form $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, wobei A_1 und A_2 quadratisch sind, dann gilt

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 .$$

Zur Berechnung von Determinanten:

- Falls $n = 1$, gibt es offenbar nur die identische Permutation, und für eine 1×1 Matrix $A = (a)$ gilt $\det A = a$.

- Falls $n = 2$, gibt es nur die beiden Permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Damit ist } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

- Falls $n = 3$, ist $|S_3| = 3! = 6$ und

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} .$$

Die Determinante einer 3×3 Matrix kann komfortabel mit der sogenannten **Regel von Sarrus** bestimmt werden.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Mit } \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \text{ ist}$$

$$\det A = 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 1) = 3$$

III. Die komplementäre Matrix

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$. Für festes i, j ersetze a_{ij} durch 1 und alle übrigen Elemente der i -ten Zeile und der j -ten Spalte durch 0.

Die entstehende Matrix werde mit A_{ij} bezeichnet.

Die Matrix A'_{ij} sei jene $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, welche aus A durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist etwa

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A'_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A'_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt : $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ und setze $c_{ij} = \det A_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Dann heißt $\tilde{A} = {}^t(c_{ij})$ die zu A **komplementäre Matrix**.

Die komplementäre Matrix \tilde{A} existiert immer und hat die zentrale Eigenschaft

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = (\det A) \cdot E_n$$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\tilde{A} \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $\det A = 3$.

Folgerung. Ist A invertierbar, dann gilt offenbar

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

Speziell für $n = 2$ ergibt sich mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A = ad - bc$, dass

$$\tilde{A} = {}^t \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{und somit}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

IV. Der Entwicklungssatz von Laplace

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ mit $n \geq 2$. Dann gilt

- (Entwicklung nach der i -ten Zeile)

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \quad \text{für jedes feste } 1 \leq i \leq n$$

- (Entwicklung nach der j -ten Spalte)

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \quad \text{für jedes feste } 1 \leq j \leq n$$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Zeile ergibt

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 3 .$$

Bei der Anwendung des Entwicklungssatzes von Laplace ist es im allgemeinen natürlich vorteilhaft, eine Zeile bzw. Spalte zu wählen, welche viele Nullen enthält.

V. Die Cramersche Regel

Determinanten sind auch bei der Berechnung der eindeutig bestimmten Lösung eines Gleichungssystems anwendbar.

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gegeben, und sei A invertierbar. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung durch $x = A^{-1}b$ gegeben.

Unter Zuhilfenahme von $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$ kann man zeigen, dass

$$x_i = \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det A} \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{ist,}$$

wobei a^1, a^2, \dots, a^n die Spalten von A bezeichnen.

Diese Berechnungsweise heißt **Cramersche Regel**.

Beispiel. Gegeben sei

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 ,$$

damit ist A invertierbar und die Cramersche Regel anwendbar. Somit

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$