02. Vektorräume und Untervektorräume

Wir kommen nun zur eigentlichen Definition eines $\mathbb{K}$-Vektorraums. Dabei ist $\mathbb{K}$ ein Körper (bei uns meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Informell ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum eine Menge V , auf der eine "Addition" von je zwei Elementen aus V und eine "Multiplikation" von Elementen aus $\mathbb{K}$ mit Elementen aus V mit gewissen Eigenschaften erklärt sind.

Definition. Ein **$\mathbb{K}$-Vektorraum** (bzw. Vektorraum über $\mathbb{K}$) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, wobei V eine Menge ist, $" + " : V \times V \to V$ $((v, w) \mapsto v + w)$ und $" \cdot " : \mathbb{K} \times V \to V$ $((\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v)$ Abbildungen sind, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

2) $\forall\ v, w \in V$ und $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

$(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

$\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

$1 \cdot v = v$ (1 ... Einselement in $\mathbb{K}$)

Die Elemente eines Vektorraums V heißen **Vektoren** , die Elemente von $\mathbb{K}$ **Skalare** , und $\mathbb{K}$ ist der sogenannte **Skalarenkörper**.

Bemerkungen.

• Die Operationen $" + "$ und $" \cdot "$ beschreiben also die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Skalaren mit Vektoren.

• Die **Subtraktion** von Vektoren ist in offensichtlicher Weise defininiert, nämlich durch $v - w = v + (-w)$.

• Wir werden folgende vereinfachte Schreibweisen verwenden:

V statt $(V,+,\cdot)$
λv statt $\lambda \cdot v$
$\lambda v + \mu w$ statt $(\lambda \cdot v) + (\mu \cdot w)$
$\frac{1}{\lambda}$ statt λ^{-1} (für $\lambda \in \mathbb{K}$)

• Mittels vollständiger Induktion folgt sofort, dass Ausdrücke der Form $v_1 + v_2 + ... + v_n$ bzw. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$ wegen der Assoziativität der Addition wohldefiniert sind.

Grundlegende Beispiele für Vektorräume.

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist

$$\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;:\; x_i \in \mathbb{K} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mittels der Operationen

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Offenbar ist der Nullvektor gleich $0 = (0, 0, ..., 0)$ und der inverse Vektor zu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ist $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ergeben sich hier der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$.

Für $n = 1$ bedeutet dies, dass $\mathbb{K}$ ein Vektorraum über sich selbst ist.

2. Sei X eine beliebige Menge und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist

$$\mathrm{Abb}(X, V) = \{f : X \to V \;:\; f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mittels der Operationen

$$(f, g) \mapsto f + g \quad \text{wobei} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \;\; \forall\, x \in X$$

$$(\lambda, f) \mapsto \lambda f \quad \text{wobei} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \;\; \forall\, x \in X$$

In diesem Vektorraum $\mathrm{Abb}(X, V)$ sind die Vektoren also alle Abbildungen $X \to V$.

Der Nullvektor in $\text{Abb}(X, V)$ ist die "Nullabbildung" $0 : X \to V$, welche jedem $x \in X$ den Nullvektor in V zuordnet.

Das inverse Element von $f : X \to V$ bzgl. der Addition ist die Abbildung $-f : X \to V$, welche durch $(-f)(x) = -f(x) \ \ \forall\, x \in X$ gegeben ist, wobei $-f(x)$ das zu $f(x)$ inverse Element in V bezeichnet.

Spezialfall. Für $V = \mathbb{R}$ bzw. $V = \mathbb{C}$ erhält man auf diese Weise die Vektorräume $\text{Abb}(X, \mathbb{R})$ bzw. $\text{Abb}(X, \mathbb{C})$, und in weiterer Spezialisierung etwa die Vektorräume $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $\text{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Beispiel. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$. Dann ist $f + g$ die Abbildung, die durch $(f + g)(x) = x^2 + e^x$ gegeben ist.

3. (Spezialisierung von 2., Polynome vom Grad $\leq n$)

Sei $\mathbb{P}_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ \exists\, a_0, a_1, ...a_n \in \mathbb{R}$ mit

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$

Dann ist $\mathbb{P}_n \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und mit den Operationen von 2. ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Für $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$, $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$(p + q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_n + b_n)t^n \in \mathbb{P}_n$

$(\lambda p)(t) = \lambda a_0 + (\lambda a_1)t + ... + (\lambda a_n)t^n \in \mathbb{P}_n$.

Bemerkung. Analoges gilt für komplexwertige Polynome.

4. Man beachte, dass $\mathbb{R}^n$ auch ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist, und $\mathbb{C}^n$ auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Erste einfache Eigenschaften bzw. Rechenregeln

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt:

1) $0 \cdot v = 0 \quad \forall\, v \in V$

2) $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$

3) $\lambda \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$ oder $v = 0$

4) $(-1) \cdot v = -v \quad \forall\, v \in V$.

Beweis.
zu 1) : $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Somit ist $0 \cdot v$ das neutrale Element bzgl. der Addition, also $0 \cdot v = 0$.

zu 2) : $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0+0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$. Somit ist $\lambda \cdot 0$ das neutrale Element bzgl. der Addition, also $\lambda \cdot 0 = 0$.

zu 3) : Sei $\lambda \cdot v = 0$. Wenn $\lambda = 0$, dann ist auch $\lambda \cdot v = 0$ wegen 1) . Wenn $\lambda \neq 0$, dann $v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = 0$ wegen 2) .

zu 4) : $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$. Das heißt, dass $(-1) \cdot v$ das (bzgl. der Addition) inverse Element zu v ist, also $(-1) \cdot v = -v$.

In einem Vektorraum V kann es vorkommen, dass gewisse nichtleere Teilmengen $W \subseteq V$ mit den Operationen in V ebenfalls Vektorräume sind. Solche Teilmengen W heißen dann **Untervektorräume** von V .

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \subseteq V$.
W heißt ein **Untervektorraum** (von V), wenn

UV1) $W \neq \emptyset$

UV2) $v, w \in W \quad \Rightarrow \quad v + w \in W$

UV3) $v \in W\ , \lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda v \in W$

Man überprüft leicht, dass dadurch mit den in V gegebenen Operationen "+" und "$\cdot$" die Teilmenge W selbst zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird.

Schreibweise: $W \lhd V$.

Man beachte, dass der Nullvektor von V wegen UV3) auch in W liegt, und der Nullvektor des Vektorraums W ist.

Des weiteren ist zu $v \in W$ auch $(-1)v = -v \in W$, und $-v$ ist auch das inverse Element von v bzgl. des Vektorraums W .

Bemerkung. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq W \subseteq V$. Dann gilt:

W ist Untervektorraum $\Leftrightarrow$ $\forall v, w \in W \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ : \ \lambda v + \mu w \in W$

Bemerkung. Sei $W \lhd V$. Mittels vollständiger Induktion zeigt man leicht, dass $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_r w_r \in W$, falls $w_1, w_2, \ldots, w_r \in W$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

Bemerkung. Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und $A, B \subseteq V$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$ erinnern wir an die Schreibweisen

$$A + B = \{v \in V \ : \ \exists\, a \in A \ , \ \exists\, b \in B \ \text{ mit } \ v = a + b\}$$

$$\lambda A = \{v \in V \ : \ \exists\, a \in A \ \text{ mit } \ v = \lambda a\}$$

Beispiele.

1) (triviale Untervektorräume)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und setze $W = \{0\}$. Dann gilt offenbar $V \lhd V$ und $W \lhd V$.

W heißt der **Nullvektorraum** und besteht nur aus dem Nullvektor von V .

2) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v, w \in V$.

Dann sind $\mathbb{K}v \lhd V$ und $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w \lhd V$.

Beweis: (für $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w \lhd V$)

Seien $u_1, u_2 \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ mit $u_1 = \lambda_1 v + \mu_1 w$ und $u_2 = \lambda_2 v + \mu_2 w$. Daraus folgt offenbar, dass $u_1 + u_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)v + (\mu_1 + \mu_2)w \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$.

Weiters ist $\lambda u_1 = (\lambda\lambda_1)v + (\lambda\mu_1)w \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$. $\square$

(Zur geometrischen Veranschaulichung: sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Dann ist $\mathbb{R}v$ eine Gerade durch den Ursprung.

Ist $V = \mathbb{R}^3$ und sind v, w linear unabhängig (siehe später), dann ist $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ eine Ebene durch den Ursprung.)

3) Seien

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist stetig}\}$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist differenzierbar}\}$$

Dann gilt: $\mathbb{P}_n \lhd \mathcal{D}(\mathbb{R}) \lhd \mathcal{C}(\mathbb{R}) \lhd \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(Beweis siehe LV Differenzialrechnung)

Als nächstes untersuchen wir das Verhalten von Untervektorräumen bei der Bildung von Durchschnitten und Vereinigungen.

Satz. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und für alle $i \in I$ (I ... Indexmenge) sei $W_i \lhd V$. Dann gilt $W = \bigcap_{i \in I} W_i \lhd V$.

(D.h. Der Durchschnitt beliebig (!) vieler Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum.)

Beweis. Für jedes $i \in I$ ist $0 \in W_i$ und damit $0 \in W \neq \emptyset$.

Seien $v, w \in W$. Für jedes $i \in I$ gilt dann: $v, w \in W_i$ und damit auch $v + w \in W_i$. Somit $v + w \in W$.

Sei $v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für jedes $i \in I$ gilt dann: $v \in W_i$ und damit auch $\lambda v \in W_i$. Somit $\lambda v \in W$. $\square$

Bemerkung. Sei $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{K}$-Vektorraums V . Dann können wir $\mathcal{W} = \{W \lhd V \ : \ S \subseteq W\}$ (i.e. die Familie aller Untervektorräume, welche S enthalten) betrachten.

Dann ist $W^* = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W$ mit obigem Satz ein Untervektorraum, und offenbar der **kleinste** Untervektorraum, welcher S enthält.

W^* heißt auch **der von S erzeugte Untervektorraum** und wird auch mit $[S]$ bezeichnet . Im Falle von $S = \emptyset$ ist $[S]$ offenbar der triviale Untervektorraum.

Bezüglich der Bildung von Vereinigungen beobachten wir zuerst:

Die Vereinigung von (sogar nur) zwei Untervektoräumen ist im allgemeinen **kein** Untervektorraum.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $v = (1,0) \in V$ und $w = (0,1) \in V$.

Wie zuvor erwähnt, sind dann $W_1 = \mathbb{R}v \lhd V$ und $W_2 = \mathbb{R}w \lhd V$.

Es sind $v, w \in W_1 \cup W_2$, aber $v + w = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$.

Sind jedoch zusätzliche (!) Bedingungen erfüllt, dann ist die Vereinigung von Untervektorräumen wieder ein Untervektorraum.

Satz. 1) Sei $W_i \lhd V \quad \forall\, i \in I$, sodass für je zwei $i, j \in I$ gilt, dass $W_i \subseteq W_j$ oder $W_j \subseteq W_i$.

Dann ist $W = \bigcup\limits_{i \in I} W_i$ ein Untervektorraum von V .

2) Seien $W_1, W_2 \lhd V$ und gelte $W_1 \cup W_2 \lhd V$. Dann ist $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

Beweis.

zu 1) : Seien $v, w \in W$. Dann $\exists\, i, j \in I$ mit $v \in W_i$ und $w \in W_j$.

Ist $W_i \subseteq W_j$, dann gilt $v, w \in W_j \;\Rightarrow\; v + w \in W_j \subseteq W$.

Ist $W_j \subseteq W_i$, dann gilt $v, w \in W_i \;\Rightarrow\; v + w \in W_i \subseteq W$. In beiden Fällen ist $v + w \in W$.

Ist $v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gibt es ein $i \in I$ mit $v \in W_i$. Damit gilt auch $\lambda v \in W_i \subseteq W$.

zu 2) : Annahme: Gelte $W_1 \not\subseteq W_2$ noch $W_2 \not\subseteq W_1$.

Dann existieren $v \in W_1$, $v \notin W_2$ und $w \in W_2$, $w \notin W_1$.

Weil $v, w \in W_1 \cup W_2$ und $W_1 \cup W_2 \lhd V$, gilt $v + w \in W_1 \cup W_2$.

Fall 1 : $v + w \in W_1$. Weil $-v \in W_1$ gilt dann $(-v) + v + w = w \in W_1$, ein Widerspruch.

Fall 2 : $v + w \in W_2$. Weil $-w \in W_2$ gilt dann $v + w + (-w) = v \in W_2$, ein Widerspruch.

Somit gilt $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$. $\square$

Satz. Seien $U, W \lhd V$. Dann ist $U + W \lhd V$.

Beweis. Seien $v_1, v_2 \in U + W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in U$ und $w_1, w_2 \in W$ mit $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$.

Folglich ist $v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$ und

$\lambda v_1 = (\lambda u_1) + (\lambda w_1) \in U + W$. $\square$

Bemerkung. $U + W$ heißt die **Summe** der Untervektorräume U, W .

Auf analoge Weise kann auch die Summe $U_1 + U_2 + \ldots + U_k \lhd V$ von k Untervektoräumen $U_1, U_2, \ldots, U_k$ gebildet werden.