

Lineare Abbildungen - II

Eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ wird auch als (Vektorraum-) **Homomorphismus** bezeichnet.

Die Menge aller Homomorphismen $V \rightarrow W$ bezeichnen wir mit

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{F : V \rightarrow W : F \text{ ist linear}\} .$$

$F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ heißt

Isomorphismus , wenn F bijektiv ist,

Monomorphismus , wenn F injektiv ist,

Epimorphismus , wenn F surjektiv ist,

Endomorphismus , wenn $V = W$,

Automorphismus , wenn $V = W$ und F bijektiv ist.

Bemerkungen.

1) (Die Komposition von linearen Abbildungen ist wieder linear)

Seien V, W, U \mathbb{K} -Vektorräume und $F : V \rightarrow W$ und $G : W \rightarrow U$ lineare Abbildungen.

Dann ist auch die Komposition $G \circ F : V \rightarrow U$ linear.

Beweis. $(G \circ F)(\lambda v_1 + \mu v_2) = G(F(\lambda v_1 + \mu v_2)) = G(\lambda F(v_1) + \mu F(v_2)) = \lambda G(F(v_1)) + \mu G(F(v_2)) = \lambda(G \circ F)(v_1) + \mu(G \circ F)(v_2) \quad \square$

2) Sei $F : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus. Dann ist die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \rightarrow V$ linear und damit ist F^{-1} ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Aufgabe.

3) Sei $\text{Aut}(V)$ die Menge der Automorphismen von V .

Dann ist $\text{Aut}(V)$ eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen.

Beweis. Aufgabe. (Man bestimme dabei das neutrale Element sowie das inverse Element zu einem F)

4) Es gilt: $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \triangleleft \text{Abb}(V, W)$.

D.h. die Summe von zwei linearen Abbildungen ist wieder linear und das skalare Vielfache einer linearen Abbildung ist wieder linear.

Beweis. Seien $F, G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist zu zeigen, dass $F + G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Setze $H = F + G$. Dann gilt $H(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (F + G)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + G(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \lambda_1 G(v_1) + \lambda_2 G(v_2) = \lambda_1(F(v_1) + G(v_1)) + \lambda_2(F(v_2) + G(v_2)) = \lambda_1(F + G)(v_1) + \lambda_2(F + G)(v_2) = \lambda_1 H(v_1) + \lambda_2 H(v_2)$.

$(\lambda F)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda \cdot F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda \cdot (\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)) = \lambda \lambda_1 F(v_1) + \lambda \lambda_2 F(v_2) = \lambda_1(\lambda F)(v_1) + \lambda_2(\lambda F)(v_2)$. \square

5) Isomorphe Vektorräume sind bzgl. ihrer Struktur als Vektorräume gleich bzw. nicht unterscheidbar.

Ist $F : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus, dann gilt etwa

- (v_1, v_2, \dots, v_k) linear unabhängig in $V \Leftrightarrow (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k))$ linear unabhängig in W
- (v_1, v_2, \dots, v_k) Basis in $V \Leftrightarrow (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k))$ Basis in W

Mit jeder linearen Abbildung $F : V \rightarrow W$ sind zwei wichtige Unterräume verbunden.

$\text{Ker}F = F^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : F(v) = 0\} \triangleleft V$... **Kern** von F

$\text{Im}F = F(V) \triangleleft W$... **Bild** von F

Offensichtlich gilt: F ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{Im}F = W$.

Beobachtung. F ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Ker}F = \{0\}$.

Beweis. " \Rightarrow " : Beachte, dass stets $0 \in \text{Ker}F$. Sei nun $0 \neq v \in \text{Ker}F$.

Wegen $F(v) = F(0) = 0$ ergibt sich ein Widerspruch zur Injektivität.

" \Leftarrow " : Sei $F(v_1) = F(v_2)$. Dann ist $0 = F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2)$, also $v_1 - v_2 \in \text{Ker}F$ und damit $v_1 - v_2 = 0$ bzw. $v_1 = v_2$.

Beispiele.

1) Sei $w \in \mathbb{R}^n$ fest und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(\lambda) = \lambda w$.

Für $w = 0$ ist $\text{Ker}F = \mathbb{R}$ und $\text{Im}F = \{0\}$. Für $w \neq 0$ ist $\text{Ker}F = \{0\}$ und $\text{Im}F$ eine Gerade durch 0.

In beiden Fällen gilt $\dim \text{Ker}F + \dim \text{Im}F = 1$ ($= \dim \mathbb{R}$).

2) Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(\lambda, \mu) = \lambda w_1 + \mu w_2$.

Dann ist F linear, $\text{Ker}F = \{0\}$ und $\text{Im}F$ eine Ebene durch 0.

Es gilt $\dim \text{Ker}F + \dim \text{Im}F = 2$ ($= \dim \mathbb{R}^2$).

3) Sei $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right).$$

Dann ist $\text{Ker}F$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Eine wichtige Beziehung zwischen $\text{Ker}F$ und $\text{Im}F$ wird durch die Dimensionsformel ausgedrückt.

Satz. (Dimensionsformel)

Sei $F : V \rightarrow W$ linear und $\dim V < \infty$. Dann gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F$$

Beweis. Weil $\dim \operatorname{Im} F \leq \dim V < \infty$, gibt es eine endliche Basis von $\operatorname{Im} F$, etwa (w_1, w_2, \dots, w_r) . Nun wähle $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ mit $F(v_i) = w_i \quad \forall i$. Dann ist (v_1, v_2, \dots, v_r) linear unabhängig in V .

Wähle eine Basis (u_1, u_2, \dots, u_k) von $\operatorname{Ker} F$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von V ist.

Sei $v \in V$. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sodass $F(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r = F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r)$.

Dann ist aber $v - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \in \operatorname{Ker} F$ und folglich gibt es $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ mit $v - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$.

Damit ist $v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$. Dies bedeutet, dass \mathcal{B} ein Erzeugendensystem von V ist.

Sei nun $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= F(0) = \mu_1 F(u_1) + \dots + \mu_k F(u_k) + \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_r F(v_r) = \\ &\lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_r F(v_r) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r. \end{aligned}$$

Weil (w_1, \dots, w_r) linear unabhängig ist, gilt $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Somit $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k = 0$ und weil (u_1, \dots, u_k) linear unabhängig ist, gilt $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$.

Damit ist \mathcal{B} auch linear unabhängig und somit eine Basis.

Aus $\dim \operatorname{Ker} F = k$, $\dim \operatorname{Im} F = r$ und $\dim V = r + k$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung.

- $\dim \operatorname{Ker} F$ heißt auch der **Defekt von F** , in Zeichen $\operatorname{def} F$.
- $\dim \operatorname{Im} F$ heißt auch der **Rang von F** , in Zeichen $\operatorname{Rg} F$.