Koordinatensysteme

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$.

Durch Wahl einer Basis in V wird ein sogenanntes Koordinatensystem definiert, wodurch jeder Vektor in V durch seine Koordinaten (Elementen aus $\mathbb{K}$) festgelegt ist. Dabei ist natürlich zu erwarten, dass bei Wahl einer anderen Basis ein- und derselbe Vektor andere Koordinaten haben wird.

Das heisst also, dass zuerst eine Basis fixiert werden muss, und danach kann von den Koordinaten eines Vektors bezüglich dieser Basis gesprochen werden.

Sei also $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von V . Dann kann jeder Vektor $v \in V$ als **eindeutige** Linearkombination der Basisvektoren $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ geschrieben werden, i.e.

$\forall\ v \in V \quad \overset{1}{\exists}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$.

Betrachten wir die Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to V$ mit

$$\Phi_{\mathcal{B}}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n \ ,$$

dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist, ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ bijektiv.

Seien nun $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}(x + y) = (x_1 + y_1)v_1 + \ldots + (x_n + y_n)v_n =$

$= (x_1v_1 + \ldots + x_nv_n) + (y_1v_1 + \ldots + y_nv_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(x) + \Phi_{\mathcal{B}}(y)$ und

$\Phi_{\mathcal{B}}(\lambda x) = (\lambda x_1)v_1 + \ldots + (\lambda x_n)v_n = \lambda(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n) = \lambda\Phi_{\mathcal{B}}(x)$.

Damit ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ auch linear. $\square$

Bemerkung. Sind $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{K}^n$, dann gilt offenbar $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$.

Der Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}}$ heißt auch ein **Koordinatensystem in** V .

Zu $v \in V$ heißt $x = (x_1, \dots, x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ der **Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$**.

Der fundamentale Zusammenhang ist also $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

Beispiele.

1) $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 0)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $v = (1, -1, 2)$ bzgl. $\mathcal{B}$.

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \quad \Rightarrow$

$(1, -1, 2) = x_1(2, -1, 3) + x_2(0, 1, 1) + x_3(1, -1, 0) =$

$= (2x_1 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + x_2)$

Daraus folgt durch Vergleich der Komponenten

$1 = 2x_1 + x_3$, $-1 = -x_1 + x_2 - x_3$, $2 = 3x_1 + x_2$, und weiters

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

Somit ist $x = (1, -1, -1)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$.

2) Ist $\mathcal{B}$ die **kanonische** Basis im $\mathbb{R}^3$, dann ist der Koordinatenvektor von $v = (v_1, v_2, v_3)$ bzgl. $\mathcal{B}$ offenbar gleich (v_1, v_2, v_3) , weil

$$v = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) \ .$$

3) In $V = \mathbb{P}_2$ sei die Basis $\mathcal{B} = (1, 1 + t, 1 + t + t^2)$ gegeben.

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $v = 6 - t^2$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ muß damit gelten:

$6 - t^2 = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (1 + t) + x_3 \cdot (1 + t + t^2) = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3) \cdot t + x_3 \cdot t^2$

Koeffizientenvergleich ergibt $x_3 = -1$, damit $x_2 + x_3 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 1$. Aus $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ folgt schließlich $x_1 = 6$. Also ist

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (6, 1, -1) \ .$$