

# Lineare Abbildungen und Matrizen

In diesem Kapitel geht es um den grundlegenden Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die zentrale Aussage ist, dass nach anfänglicher Wahl von Basen in den beteiligten Vektorräumen jeder (geeigneten) Matrix eine lineare Abbildung, und jeder linearen Abbildung eine Matrix (die sog. darstellende Matrix) zugeordnet werden kann.

Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit  $\dim V = n$  und  $\dim W = m$ .

Wir wollen jeder  $m \times n$  Matrix eine lineare Abbildung  $V \rightarrow W$  zuordnen, und umgekehrt jeder linearen Abbildung  $V \rightarrow W$  eine  $m \times n$  Matrix, sodass wir einen Isomorphismus  $M(m \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  erhalten.

**Wichtig:** Ein derartiger gesuchter Isomorphismus ist allerdings nicht kanonisch gegeben. Wir müssen zuerst in beiden Vektorräumen Basen wählen, und der Isomorphismus wird dann von den gewählten Basen abhängen.

Für das Folgende fixieren wir nun also eine Basis  $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  von  $V$ , und eine Basis  $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  von  $W$ .

## I. Die einer Matrix zugeordnete lineare Abbildung

Sei  $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Wir definieren eine lineare Abbildung  $F : V \rightarrow W$  durch Angabe der Bilder der Basisvektoren.

$$F(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$F(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m$$

...

$$F(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$$

**Dies bedeutet:** Die  $j$ -te Spalte von  $A$  ist der Koordinatenvektor von  $F(v_j)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ .

**Beispiel.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  ( $m = 2$ ,  $n = 3$ ) liefert  $F : V \rightarrow W$  mit

$$F(v_1) = w_1 + 2w_2, \quad F(v_2) = 3w_1, \quad F(v_3) = -w_1 + 4w_2.$$

Setzen wir  $L_{\mathcal{B}}^A(A) = F$ , dann ist durch diese Vorgangsweise eine Abbildung  $L_{\mathcal{B}}^A : M(m \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  erklärt.

**Spezialfall.** (siehe vorher) Seien  $V = \mathbb{K}^n$ ,  $W = \mathbb{K}^m$  und  $\mathcal{K}$  bzw.  $\mathcal{K}'$  die kanonischen Basen in  $\mathbb{K}^n$  bzw.  $\mathbb{K}^m$ .

Für  $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$  ist dann

$$F(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$$

$$F(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$$

...

$$F(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

D.h.  $F(e_j)$  ist die  $j$ -te Spalte von  $A$ .

Für ein beliebiges  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  gilt somit

$$F(x) = F(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 F(e_1) + \dots + x_n F(e_n) =$$

$$x_1 (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + x_2 (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) + \dots + x_n (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) =$$

$$\left( \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right).$$

Werden nun  $x \in \mathbb{K}^n$  und  $F(x) = L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)(x)$  als Spaltenvektoren geschrieben, dann kann  $x$  als  $n \times 1$  Matrix,  $F(x)$  als  $m \times 1$  Matrix aufgefaßt werden, und es gilt mit  $y = F(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  die Beziehung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

wobei auf der rechten Seite die Multiplikation von Matrizen auftritt!

Aus diesem Grund verwendet man auch die Schreibweise

$$F(x) = L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)(x) = Ax .$$

**Beispiel.**

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3; \mathbb{R})$ .  $A$  definiert  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$F(x) = F((x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} .$$

Im speziellen ist etwa  $F((1, 1, 1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

**(Ende des Spezialfalles)**

Zurück zum allgemeinen Fall.

Seien nun  $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$  und  $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^m \rightarrow W$  die durch  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$  definierten Koordinatensysteme in  $V$  bzw.  $W$ .

Die zentrale Aussage ist nun die, dass das folgende Diagramm **kommutativ** ist, d.h.

$$\Phi_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A) = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \rightarrow W .$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)} & \mathbb{K}^m \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ V & \xrightarrow{L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)} & W \end{array}$$

**Beweis.** Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dann ist

$$L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)(x) = Ax = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right) \text{ und}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)(x) = \Phi_{\mathcal{B}}(Ax) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\right)w_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right)w_m .$$

Andererseits ist  $\Phi_{\mathcal{A}}(x) = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$  und (mit  $F = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ )

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) &= L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + \dots + x_nF(v_n) = \\ &= x_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + x_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\right)w_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right)w_m . \quad \square \end{aligned}$$

**Dies bedeutet:** Mit  $F = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$  sei  $x$  der Koordinatenvektor von  $v \in V$  bzgl.  $\mathcal{A}$ . Dann ist  $y = Ax$  der Koordinatenvektor von  $F(v)$  bzgl.  $\mathcal{B}$ .

**Bemerkung.**  $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$  heißt die der Matrix  $A$  bzgl. der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zugeordnete lineare Abbildung  $V \rightarrow W$ .

Gilt  $V = W$  und  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , dann schreibt man statt  $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$  auch  $L_{\mathcal{B}}$ .

## II. Die einer linearen Abbildung zugeordnete Matrix

Sei nun  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

Für jedes  $j = 1, 2, \dots, n$  gibt es dann eindeutig bestimmte Skalare  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$  sodass

$$F(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m .$$

Auf diese Weise wird eine Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij})$  definiert bzw. eine Abbildung

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow M(m \times n; \mathbb{K}) \quad , \quad F \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$$

Man beachte, dass die  $j$ -te Spalte von  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$  der Koordinatenvektor von  $F(v_j)$  bzgl. der Basis  $\mathcal{B}$  ist.

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$  heißt die der linearen Abbildung  $F$  bzgl. der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zugeordnete Matrix (bzw. die **darstellende Matrix** von  $F$  bzgl.  $\mathcal{A}$

und  $\mathcal{B}$ ).

Ist  $v \in V$  und  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  bzw.  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$  der Koordinatenvektor

von  $v$  ( bzw.  $F(v)$  ) bzgl.  $\mathcal{A}$  ( bzw.  $\mathcal{B}$  ), dann gilt  $y = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot x$ .

**Beweis.**  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \Rightarrow F(v) = x_1 F(v_1) + \dots + x_n F(v_n) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m) = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j)w_1 + \dots + (\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j)w_m$ .

Damit ist  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ .  $\square$

**Satz.** Die Abbildung

$$L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : M(m \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \quad , \quad A \mapsto L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$$

ist ein Isomorphismus, dessen Umkehrabbildung durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow M(m \times n; \mathbb{K}) \quad , \quad F \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$$

gegeben ist.

**Beweis.** Wir setzen  $L = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$  und  $M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ .

i)  $L$  ist linear.

Seien  $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Zu  $v \in V$  sei  $x$  der Koordinatenvektor von  $v$  bzgl.  $\mathcal{A}$ .

$$L(\lambda A + \mu B)(v) = L(\lambda A + \mu B) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) = \Phi_{\mathcal{B}}((\lambda A + \mu B)x) =$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\lambda Ax + \mu Bx) = \lambda \Phi_{\mathcal{B}}(Ax) + \mu \Phi_{\mathcal{B}}(Bx) =$$

$$\lambda L(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) + \mu L(B) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) = \lambda L(A)(v) + \mu L(B)(v) =$$

$$(\lambda L(A) + \mu L(B))(v) .$$

Dies gilt für jedes  $v \in V$  und somit  $L(\lambda A + \mu B) = \lambda L(A) + \mu L(B)$  .

ii)  $L$  ist bijektiv.

Für  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$  gilt: die  $j$ -te Spalte von  $M(L(A))$  ist der Koordinatenvektor von  $L(A)(v_j)$  bzgl.  $\mathcal{B}$  . Dies ist aber die  $j$ -te Spalte von  $A$  .

Damit gilt:  $M \circ L(A) = A$  bzw.  $M \circ L = \text{id}_{M(m \times n; \mathbb{K})}$  .

Für  $F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  und  $v \in V$  gilt:

$$L(M(F))(v) = L(M(F)) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(x) = \Phi_{\mathcal{B}}(M(F)x) = F(v) .$$

Also  $L \circ M(F) = F$  bzw.  $L \circ M = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)}$  .

Damit ist  $L$  ein Isomorphismus.  $\square$

### Beispiele.

1) Sei  $V = \mathbb{P}_1$  mit Basis  $\mathcal{A} = (1, t)$  ,  $W = \mathbb{P}_2$  mit Basis  $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$  .

Wir suchen  $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$  für  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  .

Wir wissen: Ist  $x$  der Koordinatenvektor von  $v \in V$  bzgl.  $\mathcal{A}$  , dann ist  $Ax$  der Koordinatenvektor von  $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)(v)$  bzgl.  $\mathcal{B}$  .

$$\text{Also, mit } v = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t \text{ und } Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

gilt  $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)(v) = (x_1 - x_2) \cdot 1 + 2x_1 \cdot t + (x_1 + 2x_2) \cdot t^2$  .

Speziell, etwa für  $v = 1 - t$  , also  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = -1$  ergibt sich damit

$$L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)(v) = 2 + 2t - t^2 .$$

2) Sei  $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$  eine Basis von  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$  eine Basis von  $W = \mathbb{R}^2$ .

Die lineare Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch

$$F(v_1) = w_1 + w_2, \quad F(v_2) = 2w_1 + w_2, \quad F(v_3) = 2w_1 - w_2.$$

Dann ist die darstellende Matrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  offenbar gegeben durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei etwa  $(4, 5, -3)$  der Koordinatenvektor von  $v$  bzgl.  $\mathcal{A}$ , also  $v = 4v_1 + 5v_2 - 3v_3$ .

Dann ist  $F(v) = 4F(v_1) + 5F(v_2) - 3F(v_3) = 4(w_1 + w_2) + 5(2w_1 + w_2) - 3(2w_1 - w_2) = 8w_1 + 12w_2$ .

Also ist der Koordinatenvektor von  $F(v)$  bzgl.  $\mathcal{B}$  gleich  $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ .

Beziehungswise: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

### III. Komposition linearer Abbildungen

Seien  $V$ ,  $V'$ ,  $V''$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Basen  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B}''$  und weiters gelte  $\dim V = n$ ,  $\dim V' = m$ ,  $\dim V'' = r$ .

Wir betrachten lineare Abbildungen  $F : V \rightarrow V'$ ,  $G : V' \rightarrow V''$  und setzen  $H = G \circ F : V \rightarrow V''$ .

**Frage.** Was ist die darstellende Matrix von  $H$  bzgl.  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}''$  ?

Setze  $A = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(F)$  und  $B = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(G)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{x \mapsto Ax} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{y \mapsto By} & \mathbb{K}^r \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \Phi_{\mathcal{B}'} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}''} \\ V & \xrightarrow{F} & V' & \xrightarrow{G} & V'' \end{array}$$

Für  $v \in V$  sei  $x$  der Koordinatenvektor von  $v$  bzgl.  $\mathcal{B}$ ,  $y$  der Koordinatenvektor von  $F(v)$  bzgl.  $\mathcal{B}'$ ,  $z$  der Koordinatenvektor von  $G(F(v))$  bzgl.  $\mathcal{B}''$ .

Dann ist  $z = By$  und mit  $y = Ax$  folgt, dass  $z = B(Ax) = (BA)x$ .

**Damit:**  $M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = BA = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(G) \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(F)$

D.h. die darstellende Matrix der Komposition von zwei linearen Abbildungen ist das Produkt der einzelnen darstellenden Matrizen.

Analog zeigt man für  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$  und  $B \in M(r \times m; \mathbb{K})$ , dass

$$L_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(BA) = L_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(B) \circ L_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(A).$$