Wiederholung

Wir wiederholen einige Begriffe und Sätze der Analysis, die in der Maßtheorie eine wichtige Rolle spielen.

Definition. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

1. $d(a,b) \geq 0 \quad , \quad d(a,b) = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b$
2. $d(a,b) = d(b,a)$
3. $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt (X,d) **metrischer Raum** (und d eine Metrik auf X) .

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X,d_1) und (Y,d_2) heißt **Isometrie** wenn

$$d_2(f(a), f(b)) = d_1(a,b) \quad \forall\; a, b \in X \; .$$

Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) . Eine **Norm** auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| \;:\; V \to \mathbb{R}$ mit

1. $\|v\| \geq 0 \quad , \quad \|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad , \; \lambda \in \mathbb{K}$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung. Ist V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann wird durch

$$d(v,w) = \|v - w\|$$

eine Metrik auf V definiert.

Beispiel. Für $V = \mathbb{R}^n$ (bzw. $V = \mathbb{C}^n$) und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$) ist die euklidische Norm gegeben durch

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \quad (\text{bzw. } \|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}\ )$$

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Die Teilmenge

$$K(x, \varepsilon) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < \varepsilon\}$$

heißt **offene ε-Kugel** um x .

$G \subseteq X$ heißt **offen** , wenn $G = \emptyset$ oder mit jedem $x \in G$ ein $\varepsilon_x > 0$ existiert sodass $K(x, \varepsilon_x) \subseteq X$.

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass alle offenen ε-Kugeln selbst offene Mengen sind.

Die Familie aller offenen Mengen wird mit $\mathcal{O}(X)$ bezeichnet und heißt die **Topologie** von (X, d) .

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** , wenn $X \setminus A$ offen ist, wenn also zu jedem $x \notin A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Die Familie aller abgeschlossenen Mengen wird mit $\mathcal{A}(X)$ bezeichnet.

$K \subseteq X$ heißt **kompakt** , wenn jede offene offene Überdeckung von K eine endliche Überdeckung enthält, d.h. gilt

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \quad (G_i \ldots \text{offen}), \text{ dann } \quad \exists\, i_1, \ldots, i_n \text{ mit } K \subseteq G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_n}$$

Die Familie aller kompakten Mengen wird mit $\mathcal{K}(X)$ bezeichnet.

Bemerkung. In metrischen Räumen ist diese Definition der Kompaktheit gleichbedeutend damit, dass jede Folge in K einen Häufungspunkt in K besitzt (bzw. eine in K konvergente Teilfolge besitzt).

Wir erwähnen weiters, dass im $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) die kompakten Teilmengen genau jene sind, welche abgeschlossen und (norm)beschränkt sind.

In beliebigen metrischen Räumen sind kompakte Teilmengen stets abgeschlossen.

Die **abgeschlossene Hülle** von $M \subseteq X$ ist die kleinste abgeschlossene Menge $\overline{M}$, welche M umfaßt. Dabei gilt

$$\overline{M} = \bigcap\{A \ : \ A \text{ ist abgeschlossen und } M \subseteq A\} \quad \text{sowie}$$

$$x \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ eine Folge } (x_n) \subseteq M \text{ mit } x_n \to x \ .$$

Das **Innere** (oder auch der offene Kern) von $M \subseteq X$ ist die größte in M enthaltene offene Menge. Diese Menge wird mit $\text{int}M$ oder M° bezeichnet. Dabei gilt

$$M^\circ = \bigcup\{G \ : \ G \text{ ist offen und } G \subseteq M\} \quad \text{sowie}$$

$$x \in M^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ \varepsilon_x > 0 \text{ mit } K(x, \varepsilon_x) \subseteq M$$

Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt **Umgebung von** $x \in X$, wenn

$$\exists \ \varepsilon > 0 \text{ mit } K(x, \varepsilon) \subseteq N \ .$$

Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt **dicht**, wenn $\overline{D} = X$ ist, i.e.

$$\forall \ x \in X \ \ \forall \ \varepsilon > 0 \text{ gilt } K(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \ .$$

Gibt es in (X, d) eine abzählbare dichte Teilmenge, dann heißt der Raum **separabel** . So ist etwa der $\mathbb{R}^n$ separabel, weil die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten abzählbar und dicht ist.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **lokal kompakt**, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung N_x besitzt sodass $\overline{N_x}$ kompakt ist.

So ist etwa der $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt, aber nicht kompakt.

Definition. Eine Folge (a_n) in (X, d) heißt **Cauchy-Folge**, wenn

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall \ n, m > N_\varepsilon \ .$$

(X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

(Vollständige normierte Räume heißen **Banachräume**, vollständige Innere-Produkt-Räume heißen **Hilberträume**)

Zu jedem metrischen Raum (X, d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum (Y, δ) mit folgenden Eigenschaften

1. $\exists$ eine Isometrie $i : X \to Y$
2. $\overline{i(X)} = Y$, i.e. $i(X)$ ist dicht in Y .

Der Raum (Y, δ) ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt und heißt die **Vervollständigung** von (X, d) . So ist etwa $\mathbb{R}$ die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$.

Ein separabler, vollständiger metrische Raum heißt **polnischer Raum** .

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein inneres Produkt oder **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ mit

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Satz. (**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**)

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

(Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind)

Damit kann nun gezeigt werden, dass durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm (und damit auch eine Metrik) auf V definiert wird und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung schreibt sich dann in der Form

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Eine wichtige (und elementar nachzuweisende) Eigenschaft von Inneren-Produkt-Räumen ist die **Parallelogrammgleichung**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Weniger trivial ist folgende Approximationsaussage, wo die Vollständigkeit des Raumes benötigt wird

Satz. Sei H ein Hilbertraum, U ein abgeschlossener Unterraum und $a \in H \setminus U$.

Dann gibt es genau ein $x \in U$ mit $\|a-x\| = \inf_{y \in U} \|a-y\|$.

Für dieses x gilt zudem $\langle a-x, y \rangle = 0 \quad \forall\, y \in U$.

Definition. Seien X, Y normierte Räume und $\Lambda : X \to Y$ linear. Dann heißt Λ **beschränkt**, wenn

$$\|\Lambda\| := \sup\{\|\Lambda x\| \;:\; x \in X \;,\; \|x\| \leq 1\} < \infty$$

Folgende Aussagen gelten

- $\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\| \;:\; x \in X \;,\; \|x\| = 1\} = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|}$

- $\|\Lambda\|$ ist die kleinste Zahl K mit der Eigenschaft

  $\|\Lambda x\| \leq K\|x\| \quad \forall\, x \in X$. Damit auch $\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\|\|x\| \quad \forall\, x \in X$.

- Λ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ Λ ist stetig.

- Die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen $\Lambda : X \to Y$ wird mit $L(X,Y)$ bezeichnet. $L(X,Y)$ ist ein Vektorraum und $\|\Lambda\|$ eine Norm auf $L(X,Y)$.

Ist insbesondere $Y = \mathbb{K}$, dann heißt $\Lambda : X \to \mathbb{K}$ ein **Funktional** .

Von zentraler Bedeutung im Rahmen der Hilberträume ist der sogenannte **Darstellungssatz** .

Satz. Sei H ein Hilbertraum (über $\mathbb{K}$) und $\Lambda : H \to \mathbb{K}$ linear und stetig.

Dann gibt es genau ein $a \in H$, sodass $\Lambda x = \langle x, a \rangle \quad \forall\, x \in H$.

Beweis. Gilt $\Lambda x = 0 \quad \forall\, x$, setze $a = 0$.

Ansonsten sei $U = \mathrm{Ker}\Lambda = \{x \in H \ : \ \Lambda x = 0\}$. Dann ist $U \neq H$ und (wegen der Stetigkeit von Λ) ein abgeschlossener Unterraum.

Wegen vorher $\exists\, z \in H$ mit $\|z\| = 1$ und $\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall\, x \in U$.

Wir setzen nun $u = (\Lambda x)z - (\Lambda z)x$, wobei $x \in H$ beliebig ist.

$\Lambda u = (\Lambda x)(\Lambda z) - (\Lambda z)(\Lambda x) = 0 \ \Rightarrow \ u \in U$ und damit $\langle u, z \rangle = 0$.

$0 = \langle u, z \rangle = \langle (\Lambda x)z - (\Lambda z)x, z \rangle = \Lambda x - (\Lambda z)\langle x, z \rangle = \Lambda x - \langle x, (\overline{\Lambda z})z \rangle$

Mit $a = (\overline{\Lambda z})z$ gilt dann $\Lambda x = \langle x, a \rangle \quad \forall\, x \in H$.

Für ein (weiteres) $b \in H$ mit $\Lambda x = \langle x, b \rangle \quad \forall\, x \in H$ gilt offenbar

$\langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle \quad \forall\, x \in H$ bzw. $\langle x, a - b \rangle = 0 \quad \forall\, x \in H$.

Speziell für $x = a - b$ erhalten wir

$\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b \rangle = 0$, also $a = b$. $\square$

Definition. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{K}$.

(i) Die Menge $\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}}$ heißt der **Träger** von f .

(ii) Man sagt "f verschwindet in ∞" wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathcal{K}(X)$ gibt mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \notin K$.

Folgende Räume von Funktionen sind von besonderer Bedeutung.

- $C(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \ : \ f \ \text{ stetig}\}$
- $C_b(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \ : \ f \ \text{ stetig und beschränkt}\}$
- $C_c(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \ : \ f \ \text{ stetig und } \mathrm{supp} f \text{ kompakt}\}$
- $C_0(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \ : \ f \ \text{ stetig und } f \text{ verschwindet in } \infty\}$

Bemerkung. Die Räume $C_b(X,\mathbb{K})$ und $C_0(X,\mathbb{K})$ sind Banachräume bezüglich der Supremumsnorm

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| \ .$$

Des weiteren kann man zeigen, dass $C_c(X,\mathbb{K})$ dicht in $C_0(X,\mathbb{K})$ liegt.