Einfache Eigenschaften von Maßen

In Maßräumen ist es möglich, dass gewisse Mengen das Maß ∞ haben. Aus diesem Grund ist es erforderlich, die Menge $\mathbb{R}$ um zwei zusätzliche Elemente $+\infty$ und $-\infty$ zu erweitern und für die neue Menge

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

entsprechende Rechenregeln festzulegen. $\pm\infty$ sind dabei nicht als reelle Zahlen zu verstehen, sondern als hinzugenommene Symbole bzw. "Fernpunkte".

- $-\infty < a < +\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

- Bezüglich der metrischen Eigenschaften gilt

  $$d(\infty, a) = d(-\infty, a) = d(-\infty, +\infty) = \infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

  $$d(+\infty, +\infty) = d(-\infty, -\infty) = 0$$

- Es gelten die Rechenregeln

  $$a + \infty = +\infty \quad , \quad a - \infty = -\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

  $$a \cdot \infty = \infty \quad , \quad a \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{für } a > 0$$

  $$a \cdot \infty = -\infty \quad , \quad a \cdot (-\infty) = \infty \quad \text{für } a < 0$$

  Der Ausdruck "$\infty - \infty$" ist **nicht** definiert !

  Die Festlegung von "$0 \cdot \infty$" erfolgt nicht einheitlich.

  In der Maßtheorie ist es jedoch sinnvoll, $0 \cdot \infty = 0$ zu definieren.

Lemma. (**Monotonie des Maßes**)

Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum und $A, B \in \Omega$. Dann gilt

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B) \ .$$

Beweis. Sei $A \subseteq B$. Dann kann B als disjunkte Vereinigung der Mengen A und $B \setminus A$ geschrieben werden. Folglich ist

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A) \ . \quad \square$$

Bemerkung.

$$A \subseteq B \ \text{ und } \ \mu(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Sei nun (X, Ω, μ) ein **endlicher** Maßraum und $A, B \in \Omega$.

Dann kann $A \cup B$ als disjunkte Vereinigung $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ geschrieben werden. Damit erhalten wir

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \ .$$

Durch eine analoge Überlegung ergibt sich für $A, B, C \in \Omega$

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) -$$

$$-\mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$$

Das **Inklusions-Exklusions-Prinzip** erhalten wir daraus mittels vollständiger Induktion

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \ , \ |I|=k} \mu(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

Sei nun (X, Ω, μ) wieder ein beliebiger Maßraum und gelte weiters $A_n \in \Omega \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus B_1$$

$$\vdots$$

$$B_n = A_n \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{n-1})$$

Dann ist offenbar (B_n) eine Folge von **paarweise disjunkten** Mengen, $B_n \subseteq A_n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Folglich ist

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ .$$

Wir betrachten nun gewisse Eigenschaften von Mengenfolgen.

Sei $E_n \subseteq X \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann sind

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \varliminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \varlimsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$$

Bemerkung.

- $x \in \liminf_{n\to\infty} E_n$ genau dann, wenn x in fast allen E_n liegt, d.h. in allen E_n bis auf endlich viele Ausnahmen.
- $x \in \limsup_{n\to\infty} E_n$ genau dann, wenn x in unendlich vielen E_n liegt.

Also gilt stets $\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n$.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

$E_n = \{m \in \mathbb{Z} \ : \ m \geq 0\}$ falls n ungerade, und

$E_n = \{m \in \mathbb{Z} \ : \ m \leq 0\}$ falls n gerade.

Dann ist $\liminf_{n\to\infty} E_n = \{0\} \neq \mathbb{Z} = \limsup_{n\to\infty} E_n$.

Bemerkung. Gilt $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$, dann sagt man, dass (E_n) **konvergiert** bzw. einen **Grenzwert** (oder **Limes**) $\lim_{n\to\infty} E_n$ besitzt. Dieser ist dann per definition

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n \ .$$

Definition. Eine Mengenfolge (E_n) heißt **monoton wachsend** (bzw. **monoton fallend**), wenn

$$E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall\, n \qquad (\text{bzw.} \quad E_{n+1} \subseteq E_n \quad \forall\, n)$$

Lemma. Jede monotone Mengenfolge (E_n) ist konvergent. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{falls } (E_n) \text{ wachsend ist,}$$

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{falls } (E_n) \text{ fallend ist.}$$

(Beweis zur Übung)

Satz. (**Stetigkeit von Maßen**)

Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum und $(E_n) \subseteq \Omega$ eine Mengenfolge.

1) (Stetigkeit von unten) Falls (E_n) monoton wächst

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

2) (Stetigkeit von oben) Falls (E_n) monoton fällt und $\mu(E_1) < \infty$

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

3) $\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$

4) Falls (X, Ω, μ) ein endlicher Maßraum ist, gilt

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Beweis.

Ad 1) Auf die disjunkte Vereinigung

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (E_n \setminus E_{n-1})$$

wird die σ-Additivität angewandt.

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) + \sum_{i=2}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1})) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} (E_i \setminus E_{i-1})) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \ .$$

Ad 2) Um den Ausdruck "$\infty - \infty$" zu vermeiden, ist die Bedingung $\mu(E_1) < \infty$ erforderlich.

Wir setzen $F_n = E_1 \setminus E_n \quad \forall\, n$. Dann ist (F_n) monoton wachsend und es gilt mit den Regeln von de Morgan

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \Rightarrow$$

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(E_1) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(F_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Ad 3) Wir setzen $F_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \quad \forall\, k$. Dann ist (F_k) monoton steigend und mit 1) erhalten wir

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = \liminf_{k\to\infty} \mu(F_k) \le \liminf_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

wegen $F_k \subseteq E_k$.

Ad 4) Folgt durch Komplementierung von Aussage 3) . $\square$

Bemerkung. Die Bedingung, dass $\mu(E_1) < \infty$ in 2) gilt, ist tatsächlich notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt.

Sei $X = \mathbb{N}$ versehen mit dem Zählmaß μ . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n = \{n, n+1, \ldots\}$.

Dann ist (E_n) monoton fallend und $\mu(E_1) = \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = 0 \quad , \text{aber}$$

$$\mu(E_n) = \infty \quad \forall\ n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty\ .$$