Konstruktion von Maßen

Eine Vorgangsweise besteht darin, dass man von einem System einfacher "Figuren" ausgeht, deren Inhalt bereits "bekannt" ist (wie z.B. Intervallen in $\mathbb{R}$ oder Rechtecken im $\mathbb{R}^2$) . Dieses System wird dann zu einer σ-Algebra erweitert.

Um ein Maß auf dieser σ-Algebra zu finden, kann man von einer Mengenfunktion ausgehen, welche auf der gesamten Potenzmenge (!) definiert ist, sodass durch Einschränkung auf eine gewisse σ-Algebra ein Maß auf dieser entsteht.

Definition. Eine Mengenfunktion $\nu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ heißt **äußeres Maß** auf X , wenn gilt

(i) $\nu(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \nu(A) \leq \nu(B)$

(iii) $\nu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ (σ-Subadditivität)

Ist nun ein äußeres Maß gegeben, dann können gewisse Teilmengen als "meßbar bezüglich dieses äußeren Maßes" ausgezeichnet werden.

Definition. (Caratheodory)

Sei $\nu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ ein äußeres Maß auf X . Dann heißt $E \subseteq X$ **meßbar bezüglich des äußeren Maßes** ν , wenn

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \quad \forall\, A \subseteq X \ .$$

Bemerkung. Die Eigenschaft $\nu(A) \leq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$ ist wegen (iii) stets erfüllt. Nachzuweisen für die Meßbarkeit bezüglich des äußeren Maßes ist also nur, dass

$$\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \quad \forall\, A \subseteq X \quad \text{erfüllt ist.}$$

Die folgende Aussage beschreibt nun, wie wir eine σ-Algebra und ein Maß erhalten.

Satz. (**Fortsetzungssatz**)

Sei $\nu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ ein äußeres Maß. Dann bildet die Familie Ω aller bezüglich ν meßbaren Mengen eine σ-Algebra und die Einschränkung $\nu|_\Omega$ ist ein Maß.

Beweis.

$\emptyset \in \Omega$, weil $\nu(A) = \nu(A \cap \emptyset) + \nu(A \setminus \emptyset)$

Die Bedingung

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap (X \setminus E)) + \nu(A \cap (X \setminus (X \setminus E)))$$

besagt, dass $E \in \Omega \quad \Rightarrow \quad X \setminus E \in \Omega$

Seien nun $E_j \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$.

Wir wenden die Meßbarkeitsbedingung sukzessive an und erhalten nach k Schritten

$\nu(A) = \nu(A \cap E_1) + \nu(A \setminus E_1) =$

$= \nu(A \cap E_1) + \nu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \nu((A \setminus E_1) \setminus E_2) = \ldots =$

$\sum\limits_{j=1}^{k} \nu((A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j) + v(A \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} E_j)$

Damit ist

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{k} \nu((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j) + v(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

und folglich auch $(k \to \infty)$

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j) + v(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

Nun gilt $A \cap \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j = \biguplus\limits_{j=1}^{\infty} ((A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j)$ und damit

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j) + v(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq$$

$$\geq \nu(\biguplus_{j=1}^{\infty} ((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j)) + v(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) =$$

$$= \nu(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) + v(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

Dies bedeutet aber, dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Omega$, und somit ist Ω eine σ-Algebra.

Zu zeigen bleibt, dass $\nu|_\Omega$ ein Maß ist. Seien die $E_j \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt.

Wir setzen $A = \biguplus_{j=1}^{\infty} E_j$ und dieses A in die Ungleichung

$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j) + v(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$ von vorher ein.

Daraus erhalten wir

$\nu(\biguplus_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$ und mit der Subadditivität von ν

$\nu(\biguplus_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$. $\square$

Damit hat sich das Problem, ein Maß auf einer σ-Algebra zu finden, auf die Konstruktion eines geeigneten äußeren Maßes verlagert.