Metrische äußere Maße, Borel-Maße

Zum einen haben wir mit dem Fortsetzungssatz gesehen, dass man mit einem äußeren Maß (auf $\mathcal{P}(X)$) stets eine σ-Algebra und ein Maß auf dieser bekommt.

Liegt nun ein metrischer Raum (X, d) vor, dann spielt das System der offenen Mengen eine zentrale Rolle (weil damit ja etwa die Konvergenz von Folgen und die Stetigkeit definiert werden). Somit liegt es nahe, die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra zu betrachten.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die von den offenen Mengen von (X, d) erzeugte σ-Algebra wird mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnet und heißt die σ-Algebra der **Borel-Mengen** .

Ein auf $\mathcal{B}(X)$ definiertes Maß heißt **Borel-Maß** .

Bemerkung. $\mathcal{B}(X)$ enthält natürlich die offenen und abgeschlossenen Mengen, aber darüber hinaus noch viele weitere Mengen, wie etwa alle abzählbaren Durchschnitte von offenen Mengen und alle abzählbaren Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen, sowie auch die abzählbaren Durchschnitte (Vereinigungen) dieser Mengen etc.

Definition. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt

(i) G_δ**-Menge**, wenn A als abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen dargestellt werden kann,

(ii) F_σ**-Menge**, wenn A als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen dargestellt werden kann.

Bemerkung.

(a) Der abzählbare Durchschnitt von G_δ-Mengen ist wieder eine G_δ-Menge, die abzählbare Vereinigung von F_σ-Mengen ist wieder eine F_σ-Menge.

(b) Eine G_δ-Menge (F_σ-Menge) braucht weder offen noch abgeschlossen zu sein.

Sei $X = \mathbb{R}$ und $A = (0,1]$. Dann ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n})$.

(c) In $\mathbb{R}$ ist etwa auch $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ eine G_δ-Menge, und $(-1, +1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ eine F_σ-Menge.

Eine wichtige Eigenschaft, die zwei Teilmengen in metrischen Räumen haben können, ist die Separiertheit.

Definition. Zwei Teilmengen A, B eines metrischen Raumes heißen **separiert**, wenn

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) \ : \ a \in A \ , \ b \in B\} > 0 \ , \text{ d.h.}$$

es gibt ein $r > 0$ sodass $d(a,b) \geq r \quad \forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$ ist.

Diese Bedingung bedeutet offenbar, dass

$$\left(\bigcup_{a \in A} K(a, \tfrac{r}{2}) \right) \cap \left(\bigcup_{b \in B} K(b, \tfrac{r}{2}) \right) = \emptyset$$

Es ist klar, dass die Disjunktheit von zwei Mengen nicht für die Separiertheit ausreicht (betrachte etwa in $\mathbb{R}$ die Mengen $A = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{-\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$).

Allerdings gilt (ohne Beweis)

Lemma. Sind A, B zwei disjunkte und **kompakte** Teilmengen des metrischen Raums (X, d) , dann sind sie auch separiert.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und ν ein äußeres Maß. Dann heißt ν ein **metrisches äußeres Maß**, wenn

$$\nu(M \cup N) = \nu(M) + \nu(N) \qquad \text{(Trennungseigenschaft)}$$

für alle **separierten** Teilmengen $M, N \subseteq X$.

Für metrische äußere Maße läßt sich auch ein Stetigkeitssatz angeben.

Lemma. (**Lemma von Caratheodory**)

Sei ν ein metrisches äußeres Maß auf (X,d) , (A_j) eine wachsende Folge von Teilmengen von X und $A = \lim\limits_{j\to\infty} A_j = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$.

Weiters sei $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0 \quad \forall\, j$. Dann gilt

$$\nu(A) = \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \ .$$

Beweis. Wegen der Monotonie von ν gilt $\nu(A_j) \leq \nu(A) \quad \forall\, j$, und folglich muß $\nu(A) \leq \lim\limits_{j\to\infty} \nu(A_j)$ gezeigt werden.

Wir setzen $B_1 = A_1$ und $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ für $j > 1$ und erhalten

$A = \biguplus\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. Für $i - j \geq 2$ gilt dann

$B_j \subseteq A_j$ und $B_i \subseteq A \setminus A_{i-1} \subseteq A \setminus A_{j+1}$.

Weil A_j und $A \setminus A_{j+1}$ separiert sind, gilt dies auch für B_j und B_i .

Nun kann die Trennungseigenschaft wiederholt auf die Mengen mit geraden und jene mit ungeraden Indizes angewandt werden, woraus sich folgende Gleichungen ergeben:

$$\sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k-1}) = \nu(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}) \leq \nu(A_{2m-1}) \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \nu(B_{2k}) = \nu(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}) \leq \nu(A_{2m})$$

Wenn eine der beiden Reihen divergiert, gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \nu(A_j) = \infty$ und $\nu(A) = \infty$.

Seien also beide Reihen konvergent und $j \in \mathbb{N}$ festgehalten. Weil der Reihenrest einer konvergenten Reihe beliebig klein gemacht werden kann, erhalten wir

$$\nu(A) = \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \nu(A_j \cup \biguplus_{k=j+1}^{\infty} B_k) \leq \nu(A_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \nu(B_k) \leq$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \nu(B_k) \quad \text{und folglich} \quad \nu(A) \leq \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) \ . \quad \square$$

Die Bedeutung von metrischen äußeren Maßen ist im folgenden Ergebnis festgehalten.

Satz. Sei ν ein metrisches äußeres Maß auf (X,d) und Ω die durch den Fortsetzungssatz definierte σ-Algebra. Dann gilt

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \Omega \text{ , i.e.}$$

alle Borel-Mengen sind meßbar bezüglich ν .

(Wir erhalten also insbesondere ein Borel-Maß.)

Beweis. Weil $\mathcal{B}(X)$ auch von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass jede **abgeschlossene** Menge $E \subseteq X$ meßbar bezüglich ν ist, also

$$\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \quad \text{für } A \subseteq X \ .$$

Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$A_j = \{x \in A \setminus E \ : \ d(x,y) \geq \tfrac{1}{j} \quad \forall\, y \in E\}$$

Dann ist (A_j) monoton wachsend und es gilt $A \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ (wegen der Abgeschlossenheit von E) .

Weiters ist $d(A \cap E, A_j) \geq \frac{1}{j}$ und daher

$$\nu(A \cap E) + \nu(A_j) = \nu((A \cap E) \cup A_j) \leq \nu(A) \qquad (*)$$

Sei nun $x \in (A \setminus E) \setminus A_{j+1}$ und $y \in A_j$. Dann gibt es ein $z \in E$ mit $d(x,z) < \frac{1}{j+1}$ und

$$d(x,y) \geq d(y,z) - d(x,z) \geq \tfrac{1}{j} - \tfrac{1}{j+1} > 0 \text{ . Also ist}$$

$$d(A_j, (A \setminus E) \setminus A_{j+1}) > 0 \quad \forall\, j \ .$$

Weil diese Mengen separiert sind, kann das vorige Lemma angewandt werden, sodass

$$\nu(A \setminus E) = \lim_{j \to \infty} \nu(A_j) \ .$$

Bilden wir in (*) den Grenzübergang $j \to \infty$, ergibt sich

$$\nu(A \cap E) + \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \le \nu(A) . \quad \square$$

Definition. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum. $E \subseteq X$ heißt **Nullmenge** , wenn $\mu(E) = 0$.

Es stellt sich nun heraus, dass Teilmengen von Nullmengen nicht unbedingt meßbar sein müssen, d.h. es ist i.a. möglich, dass

$$E \in \Omega \ , \ \mu(E) = 0 \ , \ E^* \subseteq E \ , \text{ aber } \ E^* \notin \Omega \ .$$

Um diese Situation zu "beheben", betrachtet man das Mengensystem

$$\Omega^* = \{E \subseteq X \ : \ \exists \ A, B \in \Omega \ \text{ mit } \ A \subseteq E \subseteq B \ \text{ und } \ \mu(B \setminus A) = 0\} \ .$$

Dann gilt offenbar $\Omega \subseteq \Omega^*$, also auch $\emptyset, X \in \Omega^*$.

Sei $E \in \Omega^*$ und $A \subseteq E \subseteq B$, $A, B \in \Omega$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. Dann ist

$X \setminus B \subseteq X \setminus E \subseteq X \setminus A$ und $\mu((X \setminus A) \setminus (X \setminus B)) = \mu(B \setminus A) = 0$.

Also $X \setminus E \in \Omega^*$.

Sei $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \Omega^*$, und $A_i \subseteq E_i \subseteq B_i$ eine Einschachtelung von E_i für jedes i .

Setzen wir $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ und $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, dann ist $A \subseteq E \subseteq B$ und $B \setminus A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A_i)$, folglich ist $\mu(B \setminus A) = 0$ und damit $E \in \Omega^*$.

Also ist Ω^* eine σ-Algebra.

Sei $A \subseteq E \subseteq B$ eine Einschachtelung von $E \in \Omega^*$.

Wir definieren $\mu(E) = \mu(A)$. Dann ist μ offenbar auch σ-additiv auf Ω^* . Wir müssen allerdings zeigen, dass μ wohldefiniert auf Ω^* ist.

Seien $A \subseteq E \subseteq B$ und $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$ zwei Einschachtelungen von $E \in \Omega^*$.

Wegen $A \setminus A_1 \subseteq B_1 \setminus A_1$ ist dann $\mu(A \setminus A_1) = 0$, und

$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A \setminus A_1) = \mu(A_1)$.

Also ist (X, Ω^*, μ) ein Maßraum, er heißt die **Vervollständigung** von (X, Ω, μ) .

(X, Ω^*, μ) hat die Eigenschaft, dass jede Teilmenge einer Nullmenge wieder meßbar ist. Derartige Maßräume bezeichnet man als **vollständig** (bzw. ein derartiges μ als vollständiges Maß).