Das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^p$

Wir werden nun im $\mathbb{R}^p$ ein metrisches äußeres Maß definieren, welches schließlich zum Lebesgue-Maß führen wird.

Als erstes definieren wir das Volumen von Intervallen des $\mathbb{R}^p$.

Seien $a = (a_1, \ldots, a_p)$, $b = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ mit $a_i \leq b_i \quad \forall\imath$. Dann heißt die Menge

$[a, b] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p] = \{x \in \mathbb{R}^p \ : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ , \ 1 \leq i \leq p\}$

ein abgeschlossenes **Intervall** im $\mathbb{R}^p$. (Analog werden offene Intervalle definiert.)

$[a, b]$ ist im $\mathbb{R}^1$ ein übliches Intervall, im $\mathbb{R}^2$ ein Rechteck und im $\mathbb{R}^3$ ein Quader.

Das **Volumen** von $[a, b]$ ist

$$\mathrm{vol}([a, b]) = (b_1 - a_1) \ldots (b_p - a_p)$$

Wir betrachten nun spezielle Intervalle, nämlich die dyadischen Elementarzellen.

Definition. Eine **dyadische Elementarzelle** der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ im $\mathbb{R}^p$ ist eine Menge der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^p \ : \ \tfrac{k_i}{2^n} \leq x_i \leq \tfrac{k_i+1}{2^n} \ , \ k_i \in \mathbb{Z}\}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}_n$ die Menge der dyadischen Elementarzellen der Ordnung n und mit $\mathcal{D}$ die Menge aller dyadischen Elementarzellen.

Die Menge der Eckpunkte der dyadischen Elementarzellen, also

$$\{(\tfrac{k_1}{2^n}, \ldots, \tfrac{k_p}{2^n}) \ : \ k_i \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

heißt das **dyadische Gitter**.

Bemerkungen.

(a) Die Menge der dyadischen Elementarzellen $\mathcal{D}$ ist **abzählbar**, ebenso besteht das dyadische Gitter nur aus abzählbar vielen Punkten.

(b) $\mathrm{vol}([\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}] \times \ldots \times [\frac{k_p}{2^n}, \frac{k_p+1}{2^n}]) = \frac{1}{2^{np}}$

(c) Sei $x \in \mathbb{R}^p$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ (groß genug) und es existieren $k_i \in \mathbb{Z}$ mit

$$x_i \in (\tfrac{k_i}{2^n}, \tfrac{k_i+1}{2^n}) \quad \forall\, i \quad \text{und} \quad \tfrac{\sqrt{p}}{2^n} < \varepsilon \ .$$

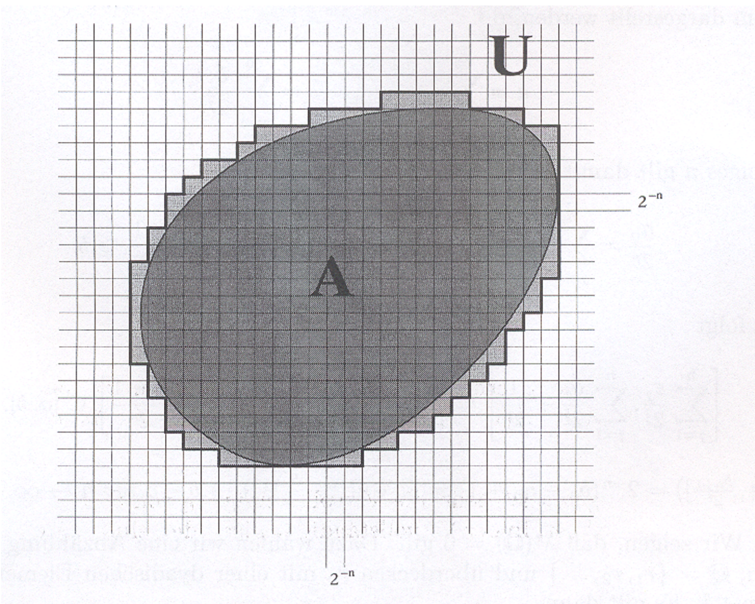
Die dyadische Elementarzelle $[\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}] \times \ldots \times [\frac{k_p}{2^n}, \frac{k_p+1}{2^n}]$ enthält dann x und liegt ganz in $K(x,\varepsilon)$, weil für $y_i \in [\frac{k_i}{2^n}, \frac{k_i+1}{2^n}]$ gilt, dass $|x_i - y_i| \leq \frac{1}{2^n}$ und folglich $d(x,y) \leq \frac{\sqrt{p}}{2^n} < \varepsilon$.

(d) Aus (c) folgt, dass das dyadische Gitter eine **dichte** Teilmenge des $\mathbb{R}^p$ ist.

Aus (a) und (c) folgt, dass jede nichtleere offene Menge des $\mathbb{R}^p$ darstellbar ist als (abzählbare) Vereinigung von dyadischen Elementarzellen.

Definition. Das **äußere (p-dimensionale) Lebesgue-Maß** λ_p^* ist

$$\lambda_p^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_j) \ : \ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \ \ , \ U_j \in \mathcal{D}\}$$



Bemerkung. Sei $n < m$. Dann ist eine dyadische Elementarzelle der Ordnung n darstellbar als Vereinigung von dyadischen Elementarzellen der Ordnung m .

Bemerkung. Man überlege sich zur Übung: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und $\varepsilon > 0$ dann existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und $U_j \in \mathcal{D}_n$, sodass

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_j) \leq \lambda_p^*(A) + \varepsilon$$

(D.h. $\lambda_p^*(A)$ kann durch dyadische Überdeckungen der Ordnung n approximiert werden.)

Bemerkung. Ist klar, um welchen Raum $\mathbb{R}^p$ es geht, schreibt man auch $\lambda^*(A)$ statt $\lambda_p^*(A)$.

Bemerkung. $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$

Beweis. Sei $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$, $U_j \in \mathcal{D}$. Dann ist $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ und

$\lambda^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_j)$. $\lambda^*(A)$ ist also eine untere Schranke und folglich $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. $\square$

Beispiel. Wir betrachten den Fall $p = 1$ und ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, und wollen zeigen, dass $\lambda^*([a, b]) = \operatorname{vol}([a, b]) = b - a$.

Dazu beobachten wir: sind Gitterpunkte $\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}, \ldots, \frac{k_1+m+1}{2^n}$ gegeben, dann ist $\sum_{j=1}^{m+1} \operatorname{vol}([\frac{k_1+j-1}{2^n}, \frac{k_1+j}{2^n}]) = \frac{m+1}{2^n}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen Gitterpunkte $\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}, \ldots, \frac{k_1+m+1}{2^n}$ mit

$$\frac{k_1}{2^n} < a \ , \ b < \frac{k_1+m+1}{2^n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2^n} < \epsilon \ .$$

Dann ist $[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m+1} [\frac{k_1+j-1}{2^n}, \frac{k_1+j}{2^n}]$ und

$\lambda^*([a,b]) \leq \sum\limits_{j=1}^{m+1} \operatorname{vol}([\frac{k_1+j-1}{2^n}, \frac{k_1+j}{2^n}]) = \frac{m+1}{2^n} \leq (b-a) + 2\varepsilon$,

woraus $\lambda^*([a,b]) \leq b-a$ folgt.

Sei nun (U_l) irgendeine dyadische Überdeckung der Ordnung n von $[a,b]$. Dann ist

$\sum\limits_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_l) \geq \sum\limits_{j=2}^{m} \operatorname{vol}([\frac{k_1+j-1}{2^n}, \frac{k_1+j}{2^n}]) \geq (b-a) - 2\varepsilon$ und folglich

$\lambda^*([a,b]) \geq (b-a) - 2\varepsilon$ bzw. $\lambda^*([a,b]) \geq b-a$.

Insgesamt erhalten wir damit $\lambda^*([a,b]) = b-a$.

Bemerkung. Auf analoge Weise kann man damit auch für ein Intervall $[a,b]$ des $\mathbb{R}^p$ zeigen, dass $\lambda_p^*([a,b]) = \operatorname{vol}([a,b])$.

Bemerkung. Man überlege sich weiters : Ist M eine Vereinigung von Elementarzellen U_j , die jeweils keine inneren Punkte gemeinsam haben, dann ist $\lambda^*(M) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_j)$.

Beispiel. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^p$ eine **abzählbare** Menge (z.B. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$).

Dann ist $\lambda_p^*(A) = 0$.

Beweis. Betrachte eine Abzählung $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ von A und überdecke $\{a_k\}$ mit einer dyadischen Elementarzelle, die ein Volumen $\frac{1}{2^{n+k}}$ hat.

Dann ist $\lambda_p^*(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n}$.

Folglich gilt mit $n \to \infty$, dass $\lambda_p^*(A) = 0$. $\square$

Satz. λ^* ist ein metrisches äußeres Maß.

Beweis. $\lambda^*(\emptyset) = 0$ ist offensichtlich. $A \subseteq B \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ wurde bereits gezeigt.

Zu zeigen ist nun, dass $\lambda^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)$.

Wähle $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung von A_j mit dyadischen Elementarzellen $U_{j,k}$ sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_{j,k}) \leq \lambda^*(A_j) + \tfrac{\varepsilon}{2^j} \ .$$

Dann ist $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{j,k}$ und weiters

$$\lambda^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^*(A_j) + \tfrac{\varepsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) + \varepsilon \ .$$

Daraus folgt $\lambda^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)$.

Seien A und B zwei Mengen mit $d(A, B) > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(A, B) > \frac{\sqrt{p}}{2^{n-2}}$.

Werden nun $x \in A$ und $y \in B$ von zwei Elementarzellen E_1, E_2 der Ordnung n mit $x \in E_1$ und $y \in E_2$ überdeckt, dann gilt für alle Punkte $x' \in E_1$, $y' \in E_2$

$$d(x', y') \geq d(x, y) - d(x, x') - d(y, y') \geq d(A, B) - \tfrac{\sqrt{p}}{2^n} - \tfrac{\sqrt{p}}{2^n} > \tfrac{\sqrt{p}}{2^{n-1}} > 0 \ .$$

Die dyadischen Elementarzellen, die A überdecken, sind also disjunkt von denen die B überdecken. Daraus folgert man, dass $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$. $\square$

Über den Fortsetzungssatz gewinnen wir damit eine σ-Algebra, welche $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ enthält und folglich ein Borel-Maß ist . Dieses Maß kann im nächsten Schritt vervollständigt werden und wir erhalten daraus das **p-dimensionale Lebesgue-Maß**.

Das Lebesgue-Maß ist so beschaffen, dass es auf den Intervallen mit dem Volumen übereinstimmt.

Es stellt sich allerdings die Frage, ob ein Maß durch die Vorgabe der Werte auf den dyadischen Elementarzellen eindeutig bestimmt ist. Die Antwort liefert der folgende Satz.

Satz. (**Eindeutigkeitssatz**) (ohne Beweis)

Seien μ_1 und μ_2 Maße auf dem Meßraum (X, Ω) und sei $\mathcal{E}$ eine bezüglich endlicher Durchschnittsbildung abgeschlossene, erzeugende Teilmenge von Ω mit den Eigenschaften

1. $\forall\ E \in \mathcal{E}\ :\ \mu_1(E) = \mu_2(E)$
2. $\exists$ eine Folge $(E_n) \subseteq \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ und

   $$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Dann ist $\mu_1 = \mu_2$ auf Ω .

Folgerung. Gibt man ein Maß auf einer Menge von Intervallen des $\mathbb{R}^p$, welche die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes erfüllt, vor, dann ist dadurch das Maß auf allen Borel-Mengen eindeutig bestimmt.

Definition. Gibt es in einem Maßraum (X, Ω, μ) eine (abzählbare) Folge von Mengen $E_n \in \Omega$, sodass $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\mu(E_n) < \infty \quad \forall\ n$, dann heißt dieser Maßraum bzw. das Maß **σ-endlich** .

Bemerkung. Der $\mathbb{R}^p$ erfüllt diese Eigenschaft, weil er als Vereinigung von Intervallen der Form $[-n, n] \times \ldots \times [-n, n]$ dargestellt werden kann.

Definition. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **σ-kompakt**, wenn kompakte Teilmengen $K_n \subseteq X$ existieren mit

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \ .$$

Bemerkung. In $X = \mathbb{R}^p$ ist jede offene Menge als abzählbare Vereinigung von dyadischen Elementarzellen darstellbar, welche ihrer Definition nach kompakt sind. Daraus folgt

$$\mathcal{B}(X) = [\mathcal{O}(X)] \subseteq [\mathcal{K}(X)] \subseteq [\mathcal{A}(X)] = [\mathcal{O}(X)]$$

Die Borel-Mengen im $\mathbb{R}^p$ werden also von den offenen, den abgeschlossenen und den kompakten Teilmengen erzeugt.

Wir erwähnen noch zwei wichtige Aussagen über Nullmengen.

Satz. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder einer Nullmenge. Insbesondere ist jede abzählbare Menge eine Nullmenge.

Beweis. Gelte $\lambda_p(E_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, und sei $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Wegen der σ-Subadditivität folgt dann $\lambda_p(E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_p(E_n) = 0$.

Es ist klar, dass eine einpunktige Menge $\{x\}$ von einer dyadischen Elementarzelle mit Volumen $\leq \varepsilon$ überdeckt werden kann. Damit ist $\lambda_p(\{x\}) \leq \varepsilon$ und folglich $\lambda_p(\{x\}) = 0$. Also ist auch jede abzählbare Menge eine Nullmenge. □

Satz. Jede Hyperebene im $\mathbb{R}^p$ ist eine Nullmenge.

Beweis. Wir veranschaulichen den allgemeinen Beweis im Fall $p = 2$. Eine Hyperebene H im $\mathbb{R}^2$ ist dann eine Gerade.

Wir überdecken den $\mathbb{R}^2$ mit abzählbar vielen Quadraten, i.e.

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} [m, m+1] \times [n, n+1] \ .$$

Wir wollen zeigen, dass für ein festes Quadrat Q die Menge $H \cap Q$ eine Nullmenge ist. Wir wählen $\varepsilon > 0$ und überdecken $H \cap Q$ durch achsenparallele Quadrate mit Seitenlänge ε . Dazu werden höchstens $2([\frac{1}{\varepsilon}] + 1)$ Quadrate benötigt. Folglich ist

$$\lambda_p(H \cap Q) \leq 2([\tfrac{1}{\varepsilon}] + 1)\varepsilon^2 \leq 2(\varepsilon + \varepsilon^2) \ .$$

Daraus folgt $\lambda_p(H \cap Q) = 0$. Weil H damit die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist, gilt $\lambda_p(H) = 0$. □