Meßbare Funktionen

Die "angemessenen" Abbildungen zwischen Meßräumen sind die meßbaren Funktionen.

Definition. Seien (X, Ω_1) und (Y, Ω_2) Meßräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Ω_1-Ω_2-meßbar oder kurz **meßbar**, wenn

$$f^{-1}(B) \in \Omega_1 \quad \forall\ B \in \Omega_2\ .$$

Sin X, Y metrische Räume und $\Omega_1 = \mathcal{B}(X)$, $\Omega_2 = \mathcal{B}(Y)$, dann heißt f **Borel-meßbar**.

Bemerkung. Ist Y ein metrischer Raum, dann ist oft stillschweigend $\Omega_2 = \mathcal{B}(Y)$.

Bemerkung. Eine Abbildung ist also genau dann Borel-meßbar, wenn das Urbild jeder Borel-Menge eine Borel-Menge ist.

Zum Nachweis der Meßbarkeit einer Abbildung ist folgende Aussage von Nutzen.

Lemma. Sei $f : (X, \Omega_1) \to (Y, \Omega_2)$ eine Abbildung und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von Ω_2 .

Dann ist f meßbar genau dann, wenn $f^{-1}(E) \in \Omega_1 \quad \forall\ E \in \mathcal{E}$.

Beweis. Übung. $\square$

Folgerung. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y ist Borel-meßbar.

Beweis. $\mathcal{B}(Y)$ wird von den offenen Mengen $\mathcal{O}(Y)$ von Y erzeugt. Sei also $V \in \mathcal{O}(Y)$.

Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. $\square$

Die Komposition von meßbaren Abbildungen ist wieder meßbar.

Lemma. Seien (X, Ω_1) , (Y, Ω_2) und (Z, Ω_3) Meßräume, und die

Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ meßbar.

Dann ist $h = g \circ f : X \to Z$ meßbar.

Beweis. Für $C \in \Omega_3$ ist $g^{-1}(C) \in \Omega_2$ und damit ist $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \Omega_1$. $\square$

Satz. Sei (X, Ω) ein Meßraum, Y ein separabler metrischer Raum und Z ein beliebiger metrischer Raum.

Seien $u, v : X \to Y$ meßbar und $\Phi : Y \times Y \to Z$ stetig.

Dann ist $h : X \to Z$ mit $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ meßbar.

Beweis. Nach dem vorhergehenden Lemma ist zu zeigen, dass die Abbildung $f : X \to Y \times Y$ mit $f(x) = (u(x), v(x))$ meßbar ist.

Ist Y separabel, dann auch $Y \times Y$. In diesem Fall ist jede offene Menge von $Y \times Y$ die abzählbare Vereinigung von Rechtecken $R = V_1 \times V_2$, wobei V_1, V_2 offene Mengen in Y sind.

Wir müssen also nur die Urbilder derartiger Rechtecke betrachten. Dabei gilt

$$f^{-1}(R) = \{x \in X \ : \ (u(x), v(x)) \in R\} =$$

$$\{x \in X \ : \ u(x) \in V_1 \ , \ v(x) \in V_2\} = u^{-1}(V_1) \cap v^{-1}(V_2) \in \Omega \ . \quad \square$$

Folgerung. Seien $u, v : X \to \mathbb{R}$ (bzw. $u, v : X \to \mathbb{C}$) meßbar.

Dann sind auch $u + v$, $u \cdot v$ etc. meßbar.

Bemerkung. Wir betrachten $Y = [-\infty, \infty]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wählen wir eine Folge (α_n) mit $\alpha_n \to \alpha$ und $\alpha_n < \alpha$, dann gilt

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] \ .$$

Sei nun $f : (X, \Omega) \to Y$. sodass $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \Omega \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch

$$f^{-1}([-\infty, \alpha]) = X \setminus f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \Omega \quad \text{und gemäß vorher}$$

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) \in \Omega \quad \text{sowie}$$

$$f^{-1}((\alpha, \beta)) = f^{-1}([-\infty, \beta)) \cap f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \Omega \; .$$

Dies bedeutet aber, dass f meßbar ist. D.h. um die Meßbarkeit von f zu prüfen, müssen wir lediglich die Urbilder von Intervallen der Form $(\alpha, \infty]$ untersuchen.

Meßbare Abbildungen kann man dazu nutzen, Maße in einem Meßraum mit Hilfe des sogenannten Bildmaßes zu definieren.

Definition. (**Bildmaß**)

Sei (X, Ω_1, μ) ein Maßraum, (Y, Ω_2) ein Meßraum und $f : X \to Y$ eine meßbare Abbildung.

Dann ist $\nu : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mit $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$, $B \in \Omega_2$ ein Maß auf Ω_2 .

ν heißt das **Bildmaß** von μ unter der Transformation f , und man schreibt auch $\nu = f(\mu)$.

Sind nämlich die Mengen $B_n \in \Omega_2$ paarweise disjunkt, dann auch die Mengen $f^{-1}(B_n)$ und es gilt

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \mu(f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) \; .$$

Sei nun (Z, Ω_3) ein weiterer Meßraum und $g : Y \to Z$ eine meßbare Abbildung. Wir setzen $\nu = f(\mu)$ und $\rho = g(\nu) = g(f(\mu))$. Für $C \in \Omega_3$ gilt dann

$$\rho(C) = \nu(g^{-1}(C)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(C))) = \mu((g \circ f)^{-1}(C)) \; .$$

Also ist $(g \circ f)(\mu) = g(f(\mu))$ (Transitivität)

Beispiel. Sei λ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^p$ und $T_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ eine Translation, i.e. $T_a(x) = x + a$, $x, a \in \mathbb{R}^p$.

Als stetige Abbildung ist T_a meßbar und es gilt $(T_a)^{-1} = T_{-a}$.

Sei $\nu = T_a(\lambda)$. Für ein abgeschlossenes Intervall $[c, d]$ des $\mathbb{R}^p$ gilt nun

$$\nu([c, d]) = \lambda((T_a)^{-1}([c, d])) = \lambda([c - a, d - a]) = \lambda([c, d]) = \mathrm{vol}([c, d]) .$$

Auf Intervallen stimmen also λ und $\nu = T_a(\lambda)$ überein.

Satz. (**Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes**)

Das Lebesgue-Maß $\lambda = \lambda_p$ ist das einzige Maß auf den Borel-Mengen des $\mathbb{R}^p$, das translationsinvariant ist und die Normierungsbedingung $\lambda(W) = 1$ erfüllt, wobei W der p-dimensionale Einheitswürfel im $\mathbb{R}^p$ ist.

Beweis. Mit dem Beispiel vorher und dem Eindeutigkeitssatz stimmen λ und $T_a(\lambda)$ auf allen Borel-Mengen überein. Dies bedeutet aber, dass λ translationsinvariant ist.

Sei μ ein weiteres translationsinvariantes Borel-Maß mit $\mu(W) = 1$.

Zerlegt man W in dyadische Elementarzellen der Ordnung n , dann liefert die Translationsinvarianz, dass alle Zellen W_n das gleiche Maß $\mu(W_n)$ haben. Also

$$1 = \mu(W) = 2^{np}\mu(W_n) \quad \Rightarrow \quad \mu(W_n) = \tfrac{1}{2^{np}} = \lambda(W_n) .$$

Damit stimmt μ auf den dyadischen Elementarzellen mit λ überein. Die dyadischen Elementarzellen sind durchschnittsabgeschlossen und erzeugen die σ-Algebra der Borel-Mengen. Nach dem Eindeutigkeitssatz stimmen beide Maße auf den Borel-Mengen überein. $\square$

Folgerung. Jedes translationsinvariante Borel-Maß μ im $\mathbb{R}^p$ hat die Form $\mu = \alpha \cdot \lambda$, wobei $\alpha = \mu(W)$ der sogenannte Normierungsfaktor ist.

Als nächstes untersuchen wir das Bildmaß des Lebesgue-Maßes bei bijektiven affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ ("Bewegungen" des $\mathbb{R}^p$) . Diese Abbildungen haben die Form $f(x) = Ax + b$, wobei A eine $p \times p$ Matrix ist mit $\det A \neq 0$. Da affine Abbildungen offenbar stetig sind, sind sie auch meßbar.

Des weiteren beobachten wir, dass eine bijektive affine Abbildung eine

Komposition von einer linearen Abbildung $A \in GL(\mathbb{R}^p)$, $x \mapsto Ax$ und einer Translation T_b ist.

Der Beweis des folgenden Satzes ist z.T. technisch recht aufwändig und wird daher ausgelassen. Im Beweis selber wird die Aussage für Elementarmatrizen gezeigt und dann das Ergebnis verwendet, dass jede reguläre Matrix als Produkt von Elementarmatrizen dargestellt werden kann.

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ eine bijektive affine Abbildung mit $f(x) = Ax+b$. Dann ist

$f(\lambda_p) = \frac{1}{|\det A|}\lambda_p$.

Bemerkung. Das Lebesgue-Maß ist also insbesondere bzgl. der Borel-Mengen rotationsinvariant.

Wir erwähnen nun ohne Beweis weitere wichtige Fakten über das Lebesgue-Maß.

Satz.

1) Die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen des $\mathbb{R}^p$ ist die Vervollständigung der σ-Algebra der Borel-Mengen des $\mathbb{R}^p$.

2) Im $\mathbb{R}^p$ gibt es $2^{|\mathbb{R}|}$ Lebesgue-meßbare Mengen, aber nur $|\mathbb{R}|$ Borel-Mengen.

3) Weil das Maß einer Lebesgue-meßbaren Mengen beliebig genau durch das Maß einer Borel-Menge approximiert werden kann, ist auch das Lebesgue-Maß selbst translations- und rotationsinvariant.

Zum Abschluß soll eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ konstruiert werden, die **nicht** Lebesgue-meßbar ist. Damit ist auch gezeigt, dass die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen verschieden von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist.

Diese Konstruktion, die auf Vitali zurückgeht, verwendet das sogenannte Auswahlaxiom. (Es gibt allerdings auch Modelle der Mengenlehre, wo die üblichen Axiome der Mengenlehre erfüllt sind, das Auswahlaxiom jedoch nicht).

Wir betrachten folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

Wegen des Auswahlaxioms können wir aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element, welches in $[0,1]$ liegt, auswählen und damit eine Menge K bilden. Dann gilt

$$\mathbb{R} = \biguplus_{y \in \mathbb{Q}} (y + K) \quad , \quad y_1 \neq y_2 \quad \Rightarrow \quad (y_1 + K) \cap (y_2 + K) = \emptyset$$

Wir nehmen an, dass K messbar ist. Mit der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$, der σ-Additivität und der Translationsinvarianz folgt dann

$$\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{y \in \mathbb{Q}} \lambda(y + K) = \sum_{y \in \mathbb{Q}} \lambda(K) \quad \Rightarrow \quad \lambda(K) > 0$$

Andererseits ist $\biguplus_{y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (y + K) \subseteq [0,2]$ und daher

$$\lambda\Big(\biguplus_{y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (y + K)\Big) = \sum_{y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \lambda(y + K) = \sum_{y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \lambda(K) \leq 2 \quad ,$$

woraus $\lambda(K) = 0$ folgt, ein Widerspruch ! Also kann K nicht meßbar sein.