Funktionenfolgen

Es sei $f_n : (X, \Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktionenfolge. Mittels "punktweiser Definition" können daraus weitere Funktionen gewonnen werden.

Für ein festes $x \in X$ erhält man die Zahlenfolge $(f_n(x))$. Zu dieser Zahlenfolge existieren die Zahlen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \ , \ \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \ , \ \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \ .$$

Falls $(f_n(x))$ konvergiert, existiert auch $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

Bemerkung. Wir erinnern daran, dass für eine Zahlenfolge (a_n) gilt

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_k \{\sup_{n\geq k} a_n\} \quad , \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_k \{\inf_{n\geq k} a_n\}$$

Nun kann man folgende Funktionen $(X, \Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren :

$$\sup_n f_n \quad , \quad x \mapsto \sup_n f_n(x)$$

$$\inf_n f_n \quad , \quad x \mapsto \inf_n f_n(x)$$

$$\limsup_n f_n \quad , \quad x \mapsto \limsup_n f_n(x)$$

$$\liminf_n f_n \quad , \quad x \mapsto \liminf_n f_n(x)$$

$$\lim_n f_n \quad , \quad x \mapsto \lim_n f_n(x) \qquad \text{(falls existent)}$$

Satz. Sei $f_n : (X, \Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge meßbarer Funktionen.

Dann sind die Funktionen $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ und (falls existent) $\lim_n f_n$ ebenfalls meßbar.

Beweis. Sei $g = \sup_n f_n$. Ist $g(x) > \alpha$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) > \alpha$. Folglich ist

$$g^{-1}((\alpha,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty]) \ .$$

Nach einer früheren Aussage bedeutet dies, dass g meßbar ist.

Weil $\inf\limits_n f_n = -\sup\limits_n(-f_n)$, ist auch $\inf\limits_n f_n$ meßbar.

Wegen der Bemerkung zuvor sind dann auch $\limsup\limits_n f_n$, $\liminf\limits_n f_n$ und (falls existent) $\lim\limits_n f_n$ meßbar. $\square$

Folgerung. Insbesondere gilt, dass für meßbare Funktionen f und g auch $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ meßbar sind.

Speziell sind damit für eine meßbare Funktion f

$f^+ = \max(f,0)$ und $f^- = -\min(f,0)$ wieder meßbar.

Diese Funktionen heißen **positiver Anteil** (bzw. **negativer Anteil**) von f .

Ein zentraler Begriff im Rahmen der Integrationstheorie ist der Begriff der "einfachen Funktion".

Definition. Eine meßbare Funktion $f : (X,\Omega) \to \mathbb{R}$ heißt **einfache Funktion** wenn f nur endlich viele Werte annimmt.

Bemerkung. Sei $f : (X,\Omega) \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion, welche die (paarweise verschiedenen) Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ annimmt.

Setzen wir $A_j = \{x \in X \ : \ f(x) = \alpha_j\}$, dann kann f in der Form

$f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}(x)$ geschrieben werden.

Diese Darstellung heißt die kanonische Darstellung von f .

Eine einfache Funktion ist also eine Linearkombination von charakteristischen Funktionen. Klarerweise ist die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge eine einfache Funktion. So ist etwa $\chi_{\mathbb{Q}}$ eine einfache

Funktion.

Des weiteren ist klar, dass die Summe, Differenz und das Produkt von einfachen Funktionen wieder eine einfache Funktion ist.

Das folgende Ergebnis zeigt nun, dass jede meßbare (positive) Funktion durch einfache Funktionen approximiert werden kann.

Satz. Sei $f : (X, \Omega) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ meßbar.

Dann existiert eine Folge (s_n) von einfachen Funktionen mit

1. $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$
2. (s_n) konvergiert punktweise gegen f
3. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf allen Teilmengen von X, auf denen f beschränkt ist.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le i \le n2^n$ sei

$$E_{n,i} = f^{-1}([\tfrac{i-1}{2^n}, \tfrac{i}{2^n})) = \{x \in X \ : \ \tfrac{i-1}{2^n} \le f(x) < \tfrac{i}{2^n}\}$$

$$F_n = f^{-1}([n, \infty]) = \{x \in X \ : \ f(x) \ge n\}$$

Nun definieren wir einfache Funktionen

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \tfrac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x) \quad , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Dann gilt offenbar $s_n(x) \le f(x) \quad , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ , \ \forall \ x \in X$

Sei $x \in E_{n,i}$, i.e. $\frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n}$ bzw. $\frac{2i-2}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2i}{2^{n+1}}$.

Ist $\frac{2i-2}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2i-1}{2^{n+1}}$, dann ist

$$s_n(x) = \tfrac{i-1}{2^n} \le \tfrac{i-1}{2^n} = s_{n+1}(x) \ .$$

Ist $\frac{2i-1}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2i}{2^{n+1}}$, dann ist

$$s_n(x) = \tfrac{i-1}{2^n} \le \tfrac{2i-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x) \ .$$

Ist $x \in F_n$, dann ist $s_n(x) = n$ und man zeigt ebenfalls, dass $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$.

Sei nun $f(x) < \infty$. Dann gilt für genügend großes n , dass $x \notin F_n$ und damit

$$s_n(x) \leq f(x) \leq s_n(x) + \tfrac{1}{2^n} \quad , \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \ .$$

Ist $f(x) = \infty$, dann ist $x \in F_n \quad \forall\, n$, also $s_n(x) = n \to f(x)$.

Damit konvergiert (s_n) punktweise gegen f .

Sei $B \subseteq X$ mit $f(x) \leq M \quad \forall\, x \in B$. Dann gilt für alle $n > M$ und alle $x \in B$, dass

$$s_n(x) \leq f(x) \leq s_n(x) + \tfrac{1}{2^n} \quad \text{bzw.} \quad \sup_{x\in B} |s_n(x) - f(x)| \leq \tfrac{1}{2^n} \ .$$

Dies bedeutet, dass auf B die Folge (s_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. $\square$

Bemerkung. Ist (a_n) eine monoton steigende Zahlenfolge mit $a_n \to a$, dann gilt mit $b_1 = a_1$ und $b_n = a_n - a_{n-1}$, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = a$.

Da $s_n(x) - s_{n-1}(x)$ wieder eine einfache Funktion ist, können wir das Ergebnis des Satzes auch so formulieren, dass

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x)$$

mit geeigneten meßbaren Mengen E_i und Konstanten $c_i > 0$.