L^p-Räume

Satz. Die Mengen $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ und $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ sind Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bezüglich der punktweisen Addition.

Beweis. (für $\mathbb{C}$)

Seien $f,g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

$f+g$ und $c \cdot f$ sind, wie früher gezeigt, wieder meßbar.

Wegen $|c \cdot f| = |c||f|$ und $|f+g| \leq |f|+|g|$ folgt mit den zuvor gezeigten Eigenschaften des Integrals dass

$$\int_X |c \cdot f| d\mu = |c| \int_X |f| d\mu < \infty \qquad \text{und}$$

$$\int_X |f+g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < \infty$$

Dies bedeutet, dass $f+g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ und $c \cdot f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$. $\square$

Wir möchten nun für integrierbare Funktionen eine Norm definieren. Als Kandidat bietet sich

$$\|f\| = \int_X |f| d\mu \quad \text{an.}$$

Hier taucht allerdings das Problem auf, dass es Funktionen $f \neq 0$ gibt, für die $\int_X |f| d\mu = 0$ ist. Man denke etwa an die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ auf $\mathbb{R}$.

Um dieses "Problem" zu beheben, werden nun Funktionen identifiziert (als "gleich" angesehen), wenn sie sich nur auf einer Nullmenge voneinander unterscheiden. Dazu betrachten wir die Relation

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in X \ : \ f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Man überzeugt sich leicht, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ ist.

Die dadurch entstehenden Mengen der Äquivalenzklassen werden mit $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ bzw. $L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ bezeichnet.

Wichtige Sprechweise. Man sagt, eine Eigenschaft gilt "**fast überall**" wenn sie bis auf Elemente einer Menge vom Maß 0 erfüllt ist.

$f \sim g$ heißt also, dass f und g fast überall gleich sind.

Man schreibt auch: $f = g$ fast überall bzw. $f = g$ f.ü.

Bemerkung. Des weiteren gilt offenbar :

$$f_1 \sim g_1 \ , \ f_2 \sim g_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2 \quad \text{und} \quad cf_1 \sim cg_1$$

Dies hat zur Folge, dass die Mengen $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ und $L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ mit einer Vektorraumstruktur versehen werden können.

Genauer: Sind $[f],[g] \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ (also jene Äquivalenzklassen, denen $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ angehören) und $c \in \mathbb{R}$, dann sind die Operationen

$$[f] + [g] = [f+g] \quad \text{und} \quad c \cdot [f] = [c \cdot f] \quad \text{wohldefiniert !!}$$

Mit diesen Operationen werden dann $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ und $L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ zu Vektorräumen. Der Nullvektor ist dann jene Äquivalenzklasse, in der die Nullfunktion liegt, also alle Funktionen, die fast überall Null sind.

Wichtig. In praktischer Hinsicht rechnet man allerdings nicht mit den Äquivalenzklassen selbst, sondern mit den einzelnen Repräsentanten, aber eben mit der Vereinbarung, dass zwei Funktionen "gleich" sind, wenn sie fast überall gleich sind.

Definition. $L^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ (bzw. $L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$) sind die Räume der absolut integrierbaren Funktionen.

Wir verallgemeinern nun die bisherigen Überlegungen und definieren für $p \geq 1$

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X,\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \ : \ f \ \text{ meßbar und } \ \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}$$

$\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \ : \ f \ \text{ meßbar und } \ \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}$

$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ (p-Norm von f)

Wiederum betrachten wir die Äquivalenzrelation $f \sim g \ \Leftrightarrow \ f = g$ f.ü.

Die dadurch entstehenden Mengen der Äquivalenzklassen werden mit $L^p_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ bzw. $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ bezeichnet.

Für $p = \infty$ definieren wir das **essentielle Supremum** von $|f|$

$\|f\|_\infty = \inf\{\lambda \ : \ \mu(\{x \in X \ : \ |f(x)| > \lambda\}) = 0\} = \text{ess sup } |f|$

Lemma. $f \in L^1(X,\mu) \ \Rightarrow \ |f| < \infty$ f.ü.

Beweis. Sei $E = \{x \in X \ : \ |f(x)| = \infty\}$. Annahme: $\mu(E) > 0$.

Dann ist $n\chi_E \leq |f|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich $n\mu(E) \leq \int_X |f| d\mu$.

Daraus folgt $\int_X |f| d\mu = \infty$, ein Widerspruch. $\square$

Lemma. $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \ \int_E f d\mu = \int_E g d\mu \quad \forall \ E \in \Omega$

Beweis. Übung.

Satz. $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu) \ \Rightarrow \ |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$

Beweis. Setze $z = \int_X f d\mu \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha z = |z|$. Also

$|\int_X f d\mu| = \alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu \leq \int_X |\alpha f| d\mu =$

$= |\alpha| \int_X |f| d\mu = \int_X |f| d\mu \quad \square$

Satz. (Satz von der **dominierten Konvergenz, Satz von Lebesgue**)

Sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Folge meßbarer Funktionen, und gelte $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ (punktweise).

Es existiere eine Funktion $g \in L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ mit $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

1. $f \in L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$
2. $\int_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$
3. $\|f_n - f\|_1 \to 0$

Beweis.

Ad 1. Offenbar gilt $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall\, x$, und damit

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^1_{\mathbb{C}}(X,\mu)$$

Ad 2. Wegen $|\int_X (f_n - f) d\mu| \leq \int_X |f_n - f| d\mu$ muß nur mehr Aussage 3. gezeigt werden.

Ad 3. Mit der Dreiecksungleichung gilt $|f_n - f| \leq 2g$. Nun wenden wir das Lemma von Fatou auf die Funktionenfolge $(2g - |f_n - f|)$ an.

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} (-\int_X |f_n - f| d\mu) =$$
$$= \int_X 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

Daraus folgt $\limsup\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$, i.e. $\limsup\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, und damit

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \ . \quad \square$$

Bemerkung. Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine Folge meßbarer Funktionen mit $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq 0$, welche punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert.

Wenn $f_1 \in L^1_{\mathbb{R}}$, dann gilt mit $g = f_1$ und obigem Satz

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

Wählt man etwa $f_n = \chi_{A_n}$, wobei (A_n) eine monoton fallende Mengenfolge ist, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_A$ mit $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.