Zusammenhang mit dem Riemann-Integral (Überblick)

Zur Erinnerung: Das Riemann-Integral einer **beschränkten** Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ erhält man, indem man eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ von $[a,b]$ betrachtet, wobei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, und die zugehörigen Ober- und Untersummen bildet.

$$O(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{n=1}^{N} M_n \Delta x_n \quad , \quad U(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{n=1}^{N} m_n \Delta x_n$$

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} \quad , \quad M_n = \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x) \quad , \quad m_n = \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

Die **Feinheit** $|\mathfrak{Z}|$ der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ist dabei $|\mathfrak{Z}| = \max\limits_{1 \le n \le N} \Delta x_n$.

Eine beschränkte Funktion heißt nun **Riemann-integrierbar**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ mit einer Feinheit $|\mathfrak{Z}| < \delta$ gilt

$$|O(f,\mathfrak{Z}) - U(f,\mathfrak{Z})| < \varepsilon \ .$$

Man erhält eine äquivalente Formulierung, wenn man sogenante **Riemannsche Summen** betrachtet

$$R(f,\mathfrak{Z},\xi) = \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \Delta x_n \quad \text{mit} \quad x_{n-1} \le \xi_n \le x_n$$

Dann gilt: f ist Riemann-integrierbar mit dem Integralwert A genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ mit $|\mathfrak{Z}| < \delta$ gilt

$$|R(f,\mathfrak{Z},\xi) - A| < \varepsilon \ .$$

A ist der gemeinsame Grenzwert von Riemannschen Summen, Ober- und Untersummen.

Eine weitere Definition des Riemann-Integrals erhält man mit dem oberen bzw. unteren Riemann-Darboux-Integral (welches im Falle einer beschränkten

Funktion immer existiert)

$$I^+ = \inf_{\mathfrak{Z}} O(f, \mathfrak{Z}) \quad , \quad I^- = \sup_{\mathfrak{Z}} U(f, \mathfrak{Z})$$

Eine Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn $I^+ = I^-$. Der gemeinsame Wert ist dann das Riemann-Integral.

Eine wichtige Beschreibung der Riemann-Integrierbarkeit besteht darin, dass das Riemann-Integral als Integral einer Differenz von stetigen Funktion approximiert werden kann.

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann ist f Riemann-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gibt mit $u \le f \le v$ und

$$\int_a^b (v(x) - u(x))dx < \varepsilon$$

Um einen analogen Satz für die Lebesgue-Integrierbarkeit anzugeben, benötigen wir halbstetige Funktionen.

Definition. Sei $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

(i) **nach unten halbstetig**, wenn $\{x : f(x) > \alpha\}$ offen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,

(ii) **nach oben halbstetig**, wenn $\{x : f(x) < \alpha\}$ offen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. f ist genau dann stetig, wenn f nach oben und nach unten halbstetig ist. Des weiteren sind halbstetige Funktionen auch Borel-meßbar.

Bemerkung. Die charakteristische Funktion einer offenen Menge $V \subseteq X$ ist nach unten halbstetig, weil

$$\{x \in X \; : \; \chi_V(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & \alpha < 0 \\ V & 0 \leq \alpha < 1 \\ \emptyset & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Die charakteristische Funktion einer kompakten Menge $K \subseteq X$ ist nach oben halbstetig, weil

$$\{x \in X \; : \; \chi_K(x) < \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \leqslant 0 \\ X \setminus K & 0 < \alpha \leqslant 1 \\ X & \alpha > 1 \end{cases}$$

Satz. (Caratheodory-Vitali)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und μ ein reguläres Maß auf (X, Ω).

Dann existieren zu $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ und $\varepsilon > 0$ eine nach unten halbstetige Funktion v und eine nach oben halbstetige Funktion u mit

$$u \leq f \leq v \quad \text{und} \quad \int_X (v - u) d\mu < \varepsilon \; .$$

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung, d.h. aus der Einschachtelungseigenschaft folgt auch die Integrierbarkeit.

Eine weitere wichtige Beschreibung der Riemann-Integrierbarkeit ist durch folgende Aussage gegeben.

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn f fast überall stetig ist, d.h. die Menge der Unstetigkeitsstellen von f hat das Lebesgue-Maß 0 .

Folgerung. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann auch Lebesgue-integrierbar und die Werte stimmen überein.

Bemerkung. Bei der Diskussion des Riemann-Integrals in der Analysis wird die Jordan-Meßbarkeit einer Menge M dadurch definiert, dass die zugehörige charakteristische Funktion χ_M Riemann-integrierbar ist.

Damit stellt sich heraus, dass eine Menge M genau dann Jordan-meßbar ist, wenn ihr Rand eine Nullmenge ist.

Beispiel. Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist in keinem Punkt stetig, daher nicht Riemann-integrierbar. Sie ist allerdings Lebesgue-integrierbar.

Beispiel. Sei $f(x) = \frac{1}{q}$ falls $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (gekürzte Darstellung) und $f(x) = 0$ falls $x \notin \mathbb{Q}$.

Diese Funktion ist in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig. Wegen $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ ist die Funktion Riemann-integrierbar.

Im Rahmen der Riemann-Integrale gibt es auch sogenannte uneigentliche Integrale (durch einen zusätzlichen Grenzübergang). Diese gibt es bei Lebesgue-Integralen insofern nicht, als immer die Zerlegung in positiven und negativen Anteil erfolgt.

Man muß hier vorsichtig sein, da das (uneigentliche) Riemann-Integral einer Funktion existieren kann, die Funktion aber nicht Lebesgue-integrierbar zu sein braucht.

Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ kann etwa im Riemannschen Sinne ausgewertet werden, die Funktion ist allerdings nicht Lebesgue-integrierbar, weil

$$\int_{\mathbb{R}} f^+ d\mu = \int_{\mathbb{R}} f^- d\mu = \infty \ .$$

Allerdings gilt: Ist f uneigentlich Riemann-integrierbar **und** Lebesgue-integrierbar, dann stimmen die Werte der Integrale überein.