# Maße auf Produkträumen

Es seien $(X_1, \Omega_1)$ und $(X_2, \Omega_2)$ zwei Meßräume. Wir wollen uns zuerst überlegen, wie wir ausgehend davon eine geeignete $\sigma$-Algebra auf $X_1 \times X_2$ definieren können.

Wir betrachten die Menge $\mathcal{E}$ der "Rechtecke" $M_1 \times M_2 \subseteq X_1 \times X_2$ mit $M_1 \in \Omega_1$ und $M_2 \in \Omega_2$ .

Die von $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma$-Algebra $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ heißt dann die **Produkt-$\sigma$-Algebra** auf $X_1 \times X_2$ .

(Analog wird die Produkt-$\sigma$-Algebra $\Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \ldots \otimes \Omega_n$ für Meßräume $(X_i, \Omega_i)$ , $i = 1, \ldots, n$ , als die von den Mengen $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ erzeugte $\sigma$-Algebra definiert, wobei $M_i \in \Omega_i \quad \forall\, i$ .)

Sind nun $(X_1, \Omega_1, \mu_1)$ und $(X_2, \Omega_2, \mu_2)$ gegebene Maßräume, dann wollen wir ein Maß auf $(X_1 \times X_2, \Omega_1 \otimes \Omega_2)$ definieren.

Die Idee besteht darin, jedem "Rechteck" $A \times B$ mit $A \in \Omega_1$ und $B \in \Omega_2$ das Maß

$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$ zuzuordnen.

**Definition.** (**Schnittmengen**)

Sei $E \subseteq X_1 \times X_2$ und $x_1 \in X_1$ , $x_2 \in X_2$ .

Der $x_1$-Schnitt (von $E$) ist $E_{x_1} = \{y \in X_2 \,:\, (x_1, y) \in E\} \subseteq X_2$ .

Der $x_2$-Schnitt (von $E$) ist $E^{x_2} = \{x \in X_1 \,:\, (x, x_2) \in E\} \subseteq X_1$ .

**Satz.** Ist $E \in \Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2$ , dann gilt $E_{x_1} \in \Omega_2$ und $E^{x_2} \in \Omega_1$ . D.h. Schnitte von meßbaren Mengen sind wieder meßbar.

**Beweis.** Sei $\tilde{\Omega} = \{E \in \Omega \,:\, E_{x_1} \in \Omega_2 \quad \forall\, x_1 \in X_1\}$ .

1. Für $E = A \times B$ mit $A \in \Omega_1$ und $B \in \Omega_2$ gilt $E_{x_1} = B$ falls $x_1 \in A$ und $E_{x_1} = \emptyset$ falls $x_1 \notin A$ . Damit gilt $E \in \tilde{\Omega}$ .

2. Weiters gilt offenbar

- $X_1 \times X_2 \in \tilde{\Omega}$
- $E \in \tilde{\Omega} \quad \Rightarrow \quad ((X_1 \times X_2) \setminus E)_{x_1} = X_2 \setminus E_{x_1} \quad \Rightarrow \quad (X_1 \times X_2) \setminus E \in \tilde{\Omega}$
- Für $E_i \in \tilde{\Omega}$ gilt $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)_{x_1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_{x_1} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \tilde{\Omega}$ .

Also ist $\tilde{\Omega}$ eine $\sigma$-Algebra und mit 1. gilt damit $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$ . Wegen $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ ist dann $\tilde{\Omega} = \Omega$ .

Analog erfolgt der Beweis für $E^{x_2}$ . $\square$

**Satz.** Seien $(X_1, \Omega_1)$ , $(X_2, \Omega_2)$ und $(X_3, \Omega_3)$ Meßräume. Des weiteren sei $f : X_1 \times X_2 \to X_3$ meßbar.

Dann gilt

1. $f_{x_1} : X_2 \to X_3$ mit $f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$ ist meßbar für jedes feste $x_1 \in X_1$ ,

2. $f^{x_2} : X_1 \to X_3$ mit $f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ ist meßbar für jedes feste $x_2 \in X_2$ .

**Beweis.** Sei $V \in \Omega_3$ und $Q = f^{-1}(V) = \{(x_1, x_2) \ : \ f(x_1, x_2) \in V\}$ .

Dann ist $Q \in \Omega_1 \otimes \Omega_2$ und mit dem vorigen Satz ist auch

$Q_{x_1} = (f_{x_1})^{-1}(V) \in \Omega_2$ und $Q^{x_2} = (f^{x_2})^{-1}(V) \in \Omega_1$ . $\square$

**Definition.** $E \in \Omega_1 \otimes \Omega_2$ heißt **elementare Menge** wenn $E$ als endliche disjunkte Vereinigung von "Rechtecken" darstellbar ist.

**Definition.** Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt **monotone Klasse** wenn für jede monoton wachsende Mengenfolge $A_i \in \mathcal{M}$ auch deren Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ in $\mathcal{M}$ liegt, und für jede monoton fallende Mengenfolge $B_i \in \mathcal{M}$ auch deren Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ in $\mathcal{M}$ liegt.

**Satz.** (ohne Beweis)

$\Omega_1 \otimes \Omega_2$ ist die kleinste monotone Klasse, die alle elementaren Mengen enthält.

**Satz.** Seien $(X_1, \Omega_1, \mu_1)$ und $(X_2, \Omega_2, \mu_2)$ $\sigma$-endliche Maßräume und $Q \in \Omega_1 \otimes \Omega_2$ .

Für $x_1 \in X_1$ , $x_2 \in X_2$ sei $\phi(x_1) = \mu_2(Q_{x_1})$ und $\psi(x_2) = \mu_1(Q^{x_2})$ .

Dann sind die Funktionen $\phi : X_1 \to \mathbb{R}$ und $\psi : X_2 \to \mathbb{R}$ meßbar und es gilt

$$\int_{X_1} \phi(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \psi(x_2) d\mu_2(x_2) .$$

**Beweis.** Sei $\tilde{\Omega}$ die Menge aller $Q \in \Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2$ für welche die obige Aussage erfüllt ist.

1. Sei $Q = A \times B$ mit $A \in \Omega_1$ , $B \in \Omega_2$ . Dann ist $Q_{x_1} = B$ wenn $x_1 \in A$ und $Q_{x_1} = \emptyset$ wenn $x_1 \notin A$ .

Folglich ist $\mu_2(Q_{x_1}) = \mu_2(B)$ wenn $x_1 \in A$ und $\mu_2(Q_{x_1}) = 0$ wenn $x_1 \notin A$ .

Damit ist $\phi(x_1) = \mu_2(B) \cdot \chi_A(x_1)$ .

Analog zeigt man, dass $\psi(x_2) = \mu_1(A) \cdot \chi_B(x_2)$ .

Damit sind $\phi$ und $\psi$ meßbare Funktionen und es gilt weiters

$$\int_{X_1} \phi(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu_2(B) \int_{X_1} \chi_A(x_1) d\mu_1(x_1) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

$$\int_{X_2} \psi(x_2) d\mu_2(x_2) = \mu_1(A) \int_{X_2} \chi_B(x_2) d\mu_2(x_2) = \mu_1(A)\mu_2(B) .$$

Also gilt $Q \in \tilde{\Omega}$ .

2. Ist $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots$ eine monoton wachsende Folge von Mengen aus $\tilde{\Omega}$ dann gilt auch $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i \in \tilde{\Omega}$ . Dies folgt aus der Monotonie der zugehörigen Folge der charakteristischen Funktionen und dem Satz über die monotone Konvergenz.

3. Falls $(Q_i)$ eine paarweise disjunkte Folgen von Mengen aus $\tilde{\Omega}$ ist,

dann gilt ebenfalls $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \in \tilde{\Omega}$ (Übung).

4. Ist $\mu_1(A) < \infty$ , $\mu_2(B) < \infty$ und $A \times B \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \ldots$ mit $Q_i \in \tilde{\Omega}$ , dann ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \in \tilde{\Omega}$ . Diese Eigenschaft ist eine Folgerung des Satzes über die dominierte Konvergenz.

5. Nun schreiben wir $X_1$ und $X_2$ als abzählbare Vereinigungen von Mengen endlichen Maßes,

$$X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^{(1)} \quad , \quad X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^{(2)}$$

und definieren Mengen $Q_{mn} = Q \cap (X_m^{(1)} \times X_n^{(2)})$ .

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller $Q$ mit $Q_{mn} \in \tilde{\Omega} \quad \forall\, m, n$ . Wegen 1. und 3. liegen alle elementaren Mengen in $\mathcal{M}$ . Wegen 2. und 4. ist $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse, und folglich gilt $\mathcal{M} = \Omega_1 \otimes \Omega_2$ . $\square$

**Definition.** Seien $(X_1, \Omega_1, \mu_1)$ und $(X_2, \Omega_2, \mu_2)$ $\sigma$-endliche Maßräume und $Q \in \Omega_1 \otimes \Omega_2$ .

Dann ist das **Produktmaß** $\mu_1 \otimes \mu_2$ definiert durch

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(Q) = \int_{X_1} \mu_2(Q_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(Q^{x_2}) d\mu_2(x_2)$$

(Die $\sigma$-Additivität folgt aus einer Folgerung des Satzes über die monotone Konvergenz.)

**Satz.** (**Fubini**)

Seien $(X_1, \Omega_1, \mu_1)$ und $(X_2, \Omega_2, \mu_2)$ $\sigma$-endliche Maßräume.

Sei $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ $(\Omega_1 \otimes \Omega_2)$-meßbar. Dann gilt

1. Sei $0 \leq f \leq \infty$ und $\phi(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2(x_2)$ und

$\psi(x_2) = \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1(x_1)$ , dann sind $\phi$ und $\psi$ meßbar und

$\int_{X_1} \phi(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \psi(x_2) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$

2. Sei $\phi^*(x_1) = \int_{X_2} |f_{x_1}(x_2)| d\mu_2(x_2)$ mit $\int_{X_1} \phi^*(x_1) d\mu_1(x_1) < \infty$ .

Dann ist $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ . Analoges gilt für den $x_2$-Schnitt.

3. Sei $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ . Dann ist $f_{x_1} \in L^1(X_2, \mu_2)$ für fast alle $x_1 \in X_1$ und $f^{x_2} \in L^1(X_1, \mu_1)$ für fast alle $x_2 \in X_2$ .

Ferner ist $\phi \in L^1(X_1, \mu_1)$ und $\psi \in L^1(X_2, \mu_2)$ und es gilt die Formel unter 1.

**Beweis.**

1. Sei $Q \in \Omega_1 \otimes \Omega_2$ und sei $f = \chi_Q$ . Wie wir vorher schon gesehen haben, stimmt die Aussage in diesem Fall. Sie stimmt ebenfalls für einfache Funktionen. Mit dem Approximationssatz für positive meßbare Funktionen ergibt sich die Gültigkeit von 1.

2. Wende den obigen Punkt auf $|f|$ an.

3. Zerlege $f$ in positiven und negativen Anteil bzw. in Realteil und Imaginärteil. Wende Punkt 1. auf jeden Teil an und bilde anschließend die Summe. $\square$

**Bemerkung.** Der Satz von Fubini besagt also, dass die Integration über das Produktmaß auf die Hintereinanderausführung von Integrationen bzgl. $\mu_1$ und $\mu_2$ zurückgeführt werden kann.

**Bemerkung.** Die obige Formel ist falsch, wenn die beteiligten Maßräume **nicht** $\sigma$-endlich sind.

Sei $X_1 = X_2 = [0, 1]$ , $\mu_1$ das Zählmaß auf $X_1$ und $\mu_2$ das Lebesgue-Maß auf $X_2$ .

Wir betrachten die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1 = 1 \quad \forall\ x_2 \quad \text{und} \quad \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) d\mu_2 = 0 \quad \forall\ x_1\ .$$

Folglich $\int_{X_2} \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 = 1 \neq 0 = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2$ .

**Bemerkung.** Sei $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ und $\mu_1$ bzw. $\mu_2$ das (eindimensionale) Lebesgue-Maßauf $X_1$ bzw. $X_2$ .

Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt sofort, dass das Produktmaß gleich dem (zweidimensionalen) Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ ist.

Analoges gilt natürlich für das $n$-fache Produkt von $\mathbb{R}$ .