Trennungsaxiome

Trennungseigenschaften geben Auskunft darüber, ob "genügend offene Mengen" vorhanden sind, um Punkte bzw. Teilmengen voneinander zu "trennen". Aus dem Vorhandensein gewisser Trennungseigenschaften ergeben sich meist sehr wichtige Konsequenzen.

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt

1) T_0**-Raum**, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine offene Menge O gibt, welche einen der Punkte, aber nicht den anderen enthält.

2) T_1**-Raum**, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen O_x und O_y gibt, sodaß $x \in O_x, y \notin O_x$ und $y \in O_y, x \notin O_y$.

3) T_2**-Raum** oder **Hausdorff-Raum**, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen O_x und O_y gibt, sodaß $x \in O_x, y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Bemerkungen.
(a) T_2-Raum $\Rightarrow$ T_1-Raum $\Rightarrow$ T_0-Raum

(b) Die indiskrete Topologie auf einer unendlichen Menge ist kein T_0-Raum.

(c) Der sog. Sierpinski Raum (X, τ) , wobei $X = \{a, b\}$ und $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, ist ein T_0-Raum, aber kein T_1-Raum.

(d) Betrachte (X, τ), wobei X eine unendliche Menge und τ die cofinite Topologie auf X ist. Sei $x \neq y$. Dann sind $O_x = X \setminus \{y\}$ und $O_y = X \setminus \{x\}$ offene Mengen, wodurch sich zeigt, daß (X, τ) ein T_1-Raum ist. Da sich je zwei nichtleere offene Mengen schneiden (siehe früher), kann (X, τ) kein T_2-Raum sein.

(e) Jeder metrische Raum (X, d) mit zugehöriger Topologie τ_d ist ein T_2-Raum, weil zu $x \neq y$ und $r = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$ gilt, dass $K(x, r) \cap K(y, r) = \emptyset$.

Satz 7. Für (X, τ) sind folgende Aussagen äquivalent:
1) (X, τ) ist ein T_1-Raum,
2) $\bigcap\{U \ : \ U \in \mathcal{U}(x)\} = \{x\}$ für alle $x \in X$,
3) $\{x\}$ ist abgeschlossen für alle $x \in X$.

Satz 8. Für (X, τ) sind folgende Aussagen äquivalent:
1) (X, τ) ist ein T_2-Raum,
2) $\bigcap\{\overline{U} \ : \ U \in \mathcal{U}(x)\} = \{x\}$ für alle $x \in X$,
3) die Diagonale $\Delta = \{(x, x) \ : \ x \in X\} \subseteq X \times X$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

Bemerkung. Die Konvergenz einer Folge (x_n) gegen einen Punkt $x \in X$ ist in topologischen Räumen wie folgt definiert : $x_n \to x$, wenn in jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ fast alle Folgenglieder liegen, d.h. $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ \ \exists N \in \mathbb{N}$ sodaß $x_n \in U$ für $n \geq N$.

Ist X eine unendliche Menge, τ die cofinite Topologie auf X und (x_n) eine Folge mit paarweise verschiedenen Folgengliedern, so

stellt sich heraus, daß (x_n) gegen jeden Punkt von X konvergiert. In T_1-Räumen ist also die Konvergenz von Folgen i.a. nicht eindeutig.
Ist hingegen (X, τ) ein T_2-Raum, dann ist offenbar die Konvergenz von Folgen eindeutig.

Bemerkung. Eine weitere sehr wichtige Eigenschaft von T_2-Räumen ist die folgende:
Seien $f, g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetige Abbildungen, wobei (Y, σ) ein T_2-Raum ist. Dann ist die Menge $A = \{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in (X, τ).
Im besonderen heißt das auch: wenn die beiden Abbildungen f und g auf einer dichten Teilmenge D (d.h. $\overline{D} = X$) übereinstimmen, i.e. $f|_D = g|_D$, dann ist $f = g$.

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt

1) **T_3-Raum**, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ und jedem Punkt $x \notin A$ offene Mengen U und V existieren, sodaß $x \in U$, $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

2) **T_{3a}-Raum**, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge und $A \subseteq X$ und jedem Punkt $x \notin A$ eine stetige Abbildung $f : X \to [0, 1]$ existiert, sodaß $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ gilt.

3) **T_4-Raum**, wenn für je zwei abgeschlossene Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ offene Mengen U und V existieren mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

4) **regulär**, wenn T_3-Raum und T_1-Raum,

5) **vollständig regulär**, wenn T_{3a}-Raum und T_1-Raum,

6) **normal**, wenn T_4-Raum und T_1-Raum.

Klarerweise gilt: normal $\Rightarrow$ T_4-Raum, vollständig regulär $\Rightarrow$ T_{3a}-Raum und regulär $\Rightarrow$ T_3-Raum. Man kann zeigen, daß die Umkehrungen i.a. nicht gelten.

Des weiteren gilt:
(i) regulär $\Rightarrow$ T_2-Raum,
(ii) vollständig regulär $\Rightarrow$ regulär,
(iii) normal $\Rightarrow$ vollständig regulär.

Beweis. ad (i): Ist $x \neq y$ dann ist $\{y\}$ abgeschlossen und $x \notin \{y\}$. Die Regularität liefert dann die T_2-Eigenschaft.

ad (ii): Wir zeigen, daß T_{3a}-Raum $\Rightarrow$ T_3-Raum. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \notin A$. Laut Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$. Dann sind die Intervalle $(\frac{1}{2}, 1]$ und $[0, \frac{1}{2})$ offen und disjunkt in $[0,1]$. Setzt man $U = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ und $V = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, dann sind U und V offen in (X, τ), $x \in U$, $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

ad (iii): Dies ist eine Konsequenz eines zentralen Satzes der Topologie, nämlich des sog. Lemmas von Urysohn (siehe später).

Beispiel. Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.

Vorbemerkung: Sind A und B Teilmengen eines topologischen

Raumes (X, τ) und gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = r$ für alle $a \in A$ und $f(b) = s$ für alle $b \in B$ wobei $r \neq s$, dann gibt es offene Mengen O_1 und O_2 in (X, τ) mit $A \subseteq O_1$, $B \subseteq O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
Offenbar gibt es disjunkte offene Umgebungen W_1 und W_2 in $\mathbb{R}$ von r und s. Die Mengen $O_1 = f^{-1}(W_1)$ und $O_2 = f^{-1}(W_2)$ leisten dann das Gewünschte.
Nun zum eigentlichen

Beweis. Aus der Analysis ist bekannt, daß für jede Teilmenge $A \neq \emptyset$ die Abbildung $d_A : X \to \mathbb{R}$ mit $d_A(x) = d(A, x) = \inf\{d(a, x) : a \in A\}$ stetig ist. Weiters gilt, daß $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \overline{A}$.
Seien nun $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Man beachte, daß dann $d_A(x) + d_B(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ ist.

Weiters ist die Abbildung $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$ stetig, und $f(x) = 0$ wenn $x \in A$, sowie $f(x) = 1$ wenn $x \in B$.

Mit der Vorbemerkung sind damit A und B in disjunkten Mengen enthalten.