08. Die inverse Matrix

Im folgenden wird von einer **quadratischen** Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ ausgegangen.

Definition. Ist $\det A \neq 0$ dann heißt die Matrix auch **regulär**, ansonsten **singulär** (also im Fall $\det A = 0$) .

Bemerkung. Es gilt

$$A \text{ ist regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = n$$

Satz. Ist A regulär, dann existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $A^{-1} \in M(n \times n)$ mit der Eigenschaft

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

A^{-1} heißt die zu A **inverse Matrix**.

Bemerkung. Wir betrachten das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und nehmen an, dass A regulär ist. Dann ist

$$A^{-1} \cdot \vec{b} = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Die Lösung $\vec{x}$ des Systems kann also sofort mit Hilfe der Inversen angegeben werden.

Bemerkung.

$$1 = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Satz. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}^T$

Dabei ist $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_{ij})$ die Matrix der **signierten algebraischen Komplemente** $\widetilde{A}_{ij}$.

Für das Element $\widetilde{A}_{ij}$ von $\widetilde{A}$ gilt $\widetilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A'_{ij}$.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\det A = 3$ und

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Probe. $\tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$.

Dann ist $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Speziell $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Rechenregeln. Seien $A, B \in M(n \times n)$ und beide Matrizen regulär.

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (Reihenfolge kehrt sich um!)

2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Die Bestimmung der algebraischen Komplemente zur Berechnung der Inversen ist für größere Matrizen sehr aufwendig, deshalb erfolgt die praktische Berechnung von A^{-1} oft nach folgdendem Algorithmus.

1. Schreibe die Matrix $A \in M(n \times n)$ und die $n-$reihige Einheitsmatrix I nebeneinander an.

2. Durch simultane Zeilenumformungen, angewandt auf A und I, bringe man A auf Zeilenstufenform.

3. Ist nun rang $A < n$, dann liegt **keine** reguläre Matrix vor, also existiert auch keine Inverse.

4. Ist rang $A = n$, dann ist A regulär und es existiert A^{-1} .

Durch weitere elementare Zeilenumformungen formt man die Matrizen so um, dass aus A schließlich die Einheitsmatrix entsteht.

Aus der simultan umgeformten Einheitsmatrix ist dann A^{-1} entstanden.

Beispiel. Siehe Tafel.