

## 1. Übungsblatt – Gruppe A

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für **①** Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$(a) \frac{x+4}{12x+4} - \frac{x-4}{3x+1} = 5, \quad \frac{x+\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}} - \frac{x+\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}} = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ fest}$$

$$(b) 3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}, \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$(c) \sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - 1 = 0, \quad 8^x = 4$$

$$(d) \ln x = 2, \quad \ln x = -1, \quad \ln x = 1/3, \quad \ln x = 0, \quad \log_x 8 = 3, \quad \log_x 25 = 2$$

$$(e) 2x - 9 < 5x - 1, \quad (3x+1)(x-2) + x^2 > 12 + (2x-1)^2, \quad \frac{5x+4}{8} - \frac{x-2}{12} > 0$$

$$(f) \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{3x}{5+x} < -3$$

$$(g) x^2 + x - 2 < 0, \quad \frac{x-4}{x-9} < 0$$

Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(2x - 5 < 7) \wedge (-3x - 1 \leq -7)$$

3. Für  $z_1 = 3 + 2i$  und  $z_2 = -3 + 2i$  berechne man

$$|z_1|, |z_2|, z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt  $z_1 \cdot z_2$  und den Quotienten  $\frac{z_1}{z_2}$  in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für  $z_1$  und  $z_2$  wie in Beispiel 3 berechne man  $z_1^4$  und alle dritten Wurzeln aus  $z_2$ . Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P_1(5, 5, 9)$  und  $P_2(-1, -1, -3)$  auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ liegen.}$$

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P(0, 4, 3)$  bzw.  $Q(4, -6, 4)$  auf der Ebene  $E_1$  :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte  $A(3, 2, 3)$ ,  $B(2, 0, -1)$  und  $C(2, 1, -4)$  in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zur Ebene } E : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18.$$

11. Man zeige, dass die Gerade

(a)  $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  in der Ebene  $E : x + 2y + z = 1$  liegt,

(b)  $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  zu  $E$  parallel ist und

(c)  $g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $E$  den Schnittpunkt  $S(0, 0, 1)$  hat.

12. Man ermittle die im Abstand  $d = 2$  zur Ebene  $E : 2x - y + 2z = 2$  liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen

$$x - y + 2z = 3 \text{ und } x + y + z = 1.$$

15. Man berechne  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  und  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$  für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16. Man berechne  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$  mit den Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes  $P(3, 2, -2)$  von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds  $ABCDEFGH$  mit  $A(5, -3, 1)$ ,  $B(3, 3, 2)$ ,  $D(-1, -2, 3)$ ,  $E(4, -2, 7)$ .

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor  $\vec{w}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_3$  dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im  $\mathbb{R}^2$  alle Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , die orthogonal sind zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

## 1. Übungsblatt – Gruppe B

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für **①** Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$(a) \frac{8x+7}{9x^2-4} = \frac{16}{15x-10}, \quad \frac{a}{a-2x} - \frac{b}{b-2x} = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ fest}$$

$$(b) \frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}, \quad (x^2+10)(x^2+4)+5=0$$

$$(c) \sqrt{2x^2+3}+x=0, \quad 3^x = \frac{1}{27}$$

$$(d) \ln x = 1, \quad \ln x = -2, \quad \ln x = -1/2, \quad \ln x = 0, \quad \log_x 243 = 5, \quad \log_x 4 = 1/2,$$

$$(e) 3x - 13 < 4x - 7, \quad 4(x-1) - (x-1)(x+1) > 5 - (x-2)^2, \quad \frac{x}{7} - 9 < \frac{8-x}{5}$$

$$(f) \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{5}, \quad \frac{4x-3}{x} \leq 3$$

$$(g) x^2 + 4x + 3 \leq 0, \quad \frac{x-2}{x+3} \geq 0$$

Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(2x - 5 < 9) \wedge (3x + 1 \geq 10)$$

3. Für  $z_1 = 4 + 3i$  und  $z_2 = 5 - 4i$  berechne man

$$|z_1|, |z_2|, z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt  $z_1 \cdot z_2$  und den Quotienten  $\frac{z_1}{z_2}$  in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für  $z_1$  und  $z_2$  wie in Beispiel 3 berechne man  $z_1^4$  und alle dritten Wurzeln aus  $z_2$ . Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P_1(1, -1, 2)$  und  $P_2(4, -1, 5)$  auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ liegen.}$$

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P(1, 3, -6)$  bzw.  $Q(5, -5, 4)$  auf der Ebene  $E_2 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$  liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte  $A(-1, 3, -2)$ ,  $B(1, 2, 1)$  und  $C(2, -1, -1)$  in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zur Ebene } E : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18.$$

11. Man zeige, dass die Gerade

(a)  $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  in der Ebene  $E : x + 2y + z = 1$  liegt,

(b)  $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  zu  $E$  parallel ist und

(c)  $g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $E$  den Schnittpunkt  $S(0, 0, 1)$  hat.

12. Man ermittle die im Abstand  $d = 1$  zur Ebene  $E : 2x - 2y + 2z = 3$  liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen  
 $x + 2y - z = 1$  und  $2x + y + z = 2$ .

15. Man berechne  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  und  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$  für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16. Man berechne  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$  mit den Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes  $P(4, 0, 2)$  von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds  $ABCDEFGH$  mit  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 2)$ ,  
 $D(-2, 2, 3)$ ,  $E(0, 1, 7)$ .

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor  $\vec{w}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_3$  dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im  $\mathbb{R}^2$  alle Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , die orthogonal sind zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.



## 1. Übungsblatt – Gruppe C

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für **①** Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$(a) \frac{24 - 5x}{6 - 2x} - 5 = \frac{34 - 14x}{9 - 3x}, \quad \frac{2a + x}{2a - x} = \frac{a + b}{a - b}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ fest}$$

$$(b) \frac{3}{x - 1} - \frac{5}{2 - 3x} = \frac{4}{2x - 1}, \quad (x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$$

$$(c) \sqrt{2x^2 - 1} + x = 0, \quad 5^x = 0.04$$

$$(d) \ln x = -1, \quad \ln x = 3, \quad \ln x = 1/4, \quad \ln x = 0, \quad \log_x 1024 = 10, \quad \log_x 27 = 3$$

$$(e) 3x + 3 < 9x + 5, \quad (3 - x)^2 > (x - 2)(x + 8) + 1, \quad \frac{3x - 2}{6} - \frac{x + 8}{9} < 0$$

$$(f) \frac{1}{x - 4} < \frac{1}{2}, \quad \frac{2x}{4 - x} < -2$$

$$(g) x^2 - x - 2 > 0, \quad \frac{x + 2}{x - 5} > 0$$

Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(3x + 12 > -9) \wedge (-2x + 9 \geq -10)$$

3. Für  $z_1 = 1 + 2i$  und  $z_2 = 3 + 5i$  berechne man

$$|z_1|, |z_2|, z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt  $z_1 \cdot z_2$  und den Quotienten  $\frac{z_1}{z_2}$  in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für  $z_1$  und  $z_2$  wie in Beispiel 3 berechne man  $z_1^4$  und alle dritten Wurzeln aus  $z_2$ . Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P_1(5, 5, 9)$  und  $P_2(-1, -1, -3)$  auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ liegen.}$$

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P(0, 4, 3)$  bzw.  $Q(4, -6, 4)$  auf der Ebene

$$E_2 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6$$

liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte  $A(3, 2, 3)$ ,  $B(2, 0, -1)$  und  $C(2, 1, -4)$  in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zur Ebene  $E : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ .

11. Man zeige, dass die Gerade

(a)  $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  in der Ebene  $E : x + 2y + z = 1$  liegt,

(b)  $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  zu  $E$  parallel ist und

(c)  $g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $E$  den Schnittpunkt  $S(0, 0, 1)$  hat.

12. Man ermittle die im Abstand  $d = 2$  zur Ebene  $E : x - 2y + 2z = 1$  liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen

$$x - y + z = 1 \text{ und } x + y - z = 2.$$

15. Man berechne  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  und  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$  für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

16. Man berechne  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$  mit den Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes  $P(1, 2, 3)$  von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds  $ABCDEFGH$  mit  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $D(-1, 2, 1)$ ,  $E(2, 2, 5)$ .

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor  $\vec{w}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_3$  dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im  $\mathbb{R}^2$  alle Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , die orthogonal sind zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.

## 1. Übungsblatt – Gruppe D

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für **①** Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$(a) \frac{8x+7}{4x^2-9} = \frac{12}{10x-15}, \quad \frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}} - \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}} = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ fest}$$

$$(b) \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3-2x} = \frac{3}{3x-1}, \quad 10x^4 - 21 = x^2$$

$$(c) x - \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-1} = 0, \quad 2^x = \frac{1}{8}$$

$$(d) \ln x = 1, \quad \ln x = -3, \quad \ln x = 1/2, \quad \ln x = 0, \quad \log_x 8 = -3, \quad \log_x 25 = -2$$

$$(e) 5x-1 > 31x+95, \quad 16(2-x)^2 + (3x-2)^2 < (15-5x)^2, \quad 3x-11 < \frac{13-2x}{5} + 7$$

$$(f) \frac{2}{3-x} \leq \frac{5}{8}, \quad \frac{x}{3+x} < 1$$

$$(g) x^2 + x - 6 \geq 0, \quad \frac{5x+1}{3-2x} \geq 0$$

Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(2x - 5 < 9) \wedge (3x + 1 \geq 10)$$

3. Für  $z_1 = -2 + 3i$  und  $z_2 = -1 + i$  berechne man

$$|z_1|, |z_2|, z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt  $z_1 \cdot z_2$  und den Quotienten  $\frac{z_1}{z_2}$  in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für  $z_1$  und  $z_2$  wie in Beispiel 3 berechne man  $z_1^4$  und alle dritten Wurzeln aus  $z_2$ . Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P_1(3, 0, 5)$  und  $P_2(-1, 1, 3)$  auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ liegen.}$$

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P(1, 3, -6)$  bzw.  $Q(5, -5, 4)$  auf der Ebene

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(-1, 2, 0)$  und  $C(1, 1, 3)$  in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zur Ebene  $E : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ .

11. Man zeige, dass die Gerade

$$(a) \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in der Ebene } E : x - y + 2z = 11 \text{ liegt,}$$

$$(b) \ g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zu } E \text{ parallel ist und}$$

$$(c) \ g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } E \text{ den Schnittpunkt } S(7, 6, 5) \text{ hat.}$$

12. Man ermittle die im Abstand  $d = 2$  zur Ebene  $E : x - 2y + 3z = 4$  liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen

$$x - y + 2z = 3 \text{ und } x + y + z = 1.$$

15. Man berechne  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  und  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$  für  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

16. Man berechne  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$  mit den Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes  $P(3, 2, -2)$  von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds  $ABCDEFGH$  mit  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 0, 0)$ ,  $D(1, 3, 0)$ ,  $E(2, 2, 4)$ .

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor  $\vec{w}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_3$  dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im  $\mathbb{R}^2$  alle Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , die orthogonal sind zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.



## 1. Übungsblatt – Gruppe GEO

Die Beispiele dieses Übungsblattes zählen jeweils für **①** Punkt.

1. Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$(a) \frac{10x - 11}{12x + 18} = \frac{3}{2} - \frac{4x + 1}{6x - 9}, \quad \frac{a - b}{2c - x} = \frac{a + b}{2c + x}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ fest}$$

$$(b) \frac{8 - x}{2} - \frac{2x - 11}{x - 3} = \frac{x - 2}{6}, \quad (x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$$

$$(c) \sqrt{4x^2 - x} + 2 = 0, \quad 10^x = 0.0001$$

$$(d) \ln x = 1, \quad \ln x = -2, \quad \ln x = -1/3, \quad \ln x = 0, \quad \log_x 512 = -3, \quad \log_x 125 = -3$$

$$(e) 3x + 3 < 9x + 5, \quad (3 - x)^2 > (x - 2)(x + 8) + 1, \quad \frac{3x - 2}{6} - \frac{x + 8}{9} < 0$$

$$(f) \frac{1}{x - 4} < \frac{1}{2}, \quad \frac{2x}{4 - x} < -2$$

$$(g) x^2 - x - 2 > 0, \quad \frac{x + 2}{x - 5} > 0$$

Die Aufgaben unter (a) bis (g) zählen jeweils als ein Beispiel.

2. Man löse das Ungleichungssystem

$$(5x + 4 > 14) \wedge (3x - 9 < 5)$$

3. Für  $z_1 = -2 + 3i$  und  $z_2 = -1 + i$  berechne man

$$|z_1|, |z_2|, z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$$

4. Schreibe die komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  von Beispiel 3 in Polardarstellung an und berechne dann das Produkt  $z_1 \cdot z_2$  und den Quotienten  $\frac{z_1}{z_2}$  in Polardarstellung. Man vergleiche das Ergebnis.

5. Für  $z_1$  und  $z_2$  wie in Beispiel 3 berechne man  $z_1^4$  und alle dritten Wurzeln aus  $z_2$ . Hinweis: Man verwende die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

6. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P_1(-11, 11, -14)$  und  $P_2(1, 5, 15)$  auf der Geraden  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$  liegen.

7. Es ist zu untersuchen, ob sich die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden, und gegebenenfalls der Schnittpunkt und der Schnittwinkel anzugeben.

8. Es ist zu untersuchen, ob die Punkte  $P(0, 4, 3)$  bzw.  $Q(4, -6, 4)$  auf der Ebene  $E_1 :$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liegen.

9. Bestimme die Gleichung der Ebene durch die Punkte  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(4, 2, 0)$  und  $C(3, 1, 1)$  in parameterfreier Form und in Parameterform.

10. Zu ermitteln ist die Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zur Ebene } E : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18.$$

11. Man zeige, dass die Gerade

(a)  $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  in der Ebene  $E : x - y + 2z = 11$  liegt,

(b)  $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  zu  $E$  parallel ist und

(c)  $g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $E$  den Schnittpunkt  $S(7, 6, 5)$  hat.

12. Man ermittle die im Abstand  $d = 2$  zur Ebene  $E : x - 2y + 3z = 4$  liegenden Ebenen.

13. Geben Sie für die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die HESSE'sche Normalform an.

14. Man bestimme die Schnittgerade der Ebenen  
 $2x - y - z = 2$  und  $x + 2y + 2z = 3$ .

15. Man berechne  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  und  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$  für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

16. Man berechne  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$  mit den Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  von Beispiel 15.

17. Man berechne den Normalabstand des Punktes  $P(1, 2, 3)$  von der Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

18. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds  $ABCDEFGH$  mit  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  
 $D(-1, 2, 1)$ ,  $E(2, 2, 5)$ .

19. Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20. Stellen Sie den Vektor  $\vec{w}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_3$  dar:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

21. Man bestimme eine Basis des von den folgenden Vektoren aufgespannten Vektorraumes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Man bestimme  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$$

orthogonal sind.

23. Man beschreibe im  $\mathbb{R}^2$  alle Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , die orthogonal sind zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

24. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Raumes.

25. Die folgenden Vektoren bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt ermittle man daraus eine orthonormale Basis.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

26. Man berechne eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraumes.