02. Komplexe Zahlen

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dass $x^2 \geq 0$, hat die Gleichung $x^2+1=0$ offenbar keine reellen Lösungen. Rein formal würden wir $x = \pm\sqrt{-1}$ erhalten, aber dies sind keine reellen Zahlen.

Um das Problem zu lösen, erweitert man die Menge der reellen Zahlen bzw. die Zahlengerade geeignet. Dazu führt man die **imaginäre Einheit** i mittels der Eigenschaft

$i^2 = -1$ ein.

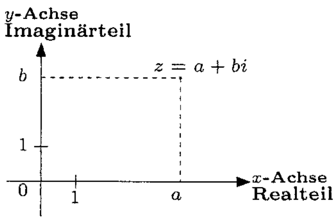
Durch Hinzunahme einer weiteren Koordinatenachse erhalten wir die **Gauß'sche Zahlenebene**. Die Punkte in dieser Ebene werden in der Form

$z = a + bi \;\; , \;\; a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt.

Der **Realteil** a stellt dabei die Abszisse, der **Imaginärteil** b die Ordinate dar.

Definition. $\mathbb{C} = \{z = a + bi \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen.

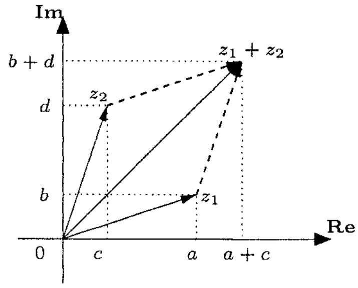
$a = \text{Re}\, z$ ist der Realteil von z , $b = \text{Im}\, z$ der Imaginärteil von z .



Die **Addition** bzw. **Subtraktion** komplexer Zahlen ist wie folgt definiert und kann geometrisch veranschaulicht werden.

Seien $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \quad , \quad z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$



Bei der **Multiplikation** komplexer Zahlen ergibt sich formal

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi + bd \cdot i^2$$

Man definiert $\quad z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Die **Division** komplexer Zahlen wird ebenfalls über die vorherige formale Berechnung definiert.

$$\tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{a+bi}{c+di} = \tfrac{a+bi}{c+di} \cdot \tfrac{c-di}{c-di} = \tfrac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \tfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \tfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Dabei muß $c^2 + d^2 \neq 0$ sein.

Setzen wir speziell $z_1 = 1 = 1 + 0 \cdot i$, dann erhalten wir den **Kehrwert** von z_2 ,

$$\tfrac{1}{z_2} = \tfrac{c}{c^2+d^2} - \tfrac{d}{c^2+d^2}i \ .$$

Folglich ist dann etwa $\frac{1}{i} = -i$.

Eigenschaften komplexer Zahlen

1. Wir können $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auffassen mittels der Identifizierung

$$x \in \mathbb{R} \quad \leftrightarrow \quad x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$$

2. $z = a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ und $b = 0$

3. Betrachten wir eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$.

Für $\frac{p^2}{4} - q > 0$ erhalten wir zwei verschiedene reelle Lösungen,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Für $\frac{p^2}{4} - q = 0$ erhalten wir eine reelle Doppellösung $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$.

Für $\frac{p^2}{4} - q < 0$ erhalten wir zwei konjugiert komplexe Lösungen,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \cdot i = a \pm bi$$

Beispiel. Betrachte $x^2 + x + 1 = 0$.

Dann ist $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Definition. Die Zahl $\overline{z} = a - bi$ heisst die zu $z = a + bi$ **konjugiert komplexe Zahl**.

Offenbar gilt $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Definition. $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ heisst der **Betrag** von z .

Folgende Eigenschaften sind dabei erfüllt:

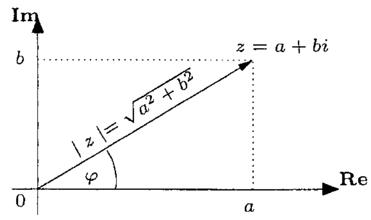
1. $|\overline{z}| = |z|$
2. $z + \overline{z} = 2a = 2\text{Re } z \in \mathbb{R}$, $z - \overline{z} = 2bi = 2i \text{ Im } z$
3. Also $\text{Re } z = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\text{Im } z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Polardarstellung komplexer Zahlen.

Neben der Angabe der Achenabschnitte a, b kann die komplexe Zahl $z = a + bi$ auch durch Angabe des **Betrages** $r = |z|$ und des **Arguments** $\varphi = \arg z$ dargestellt werden.

Dabei ist φ der Winkel, den der Pfeil, der vom Ursprung zum Punkt z

weist, mit der positiven $x-$Achse einschließt.



Der Winkel φ wird im Bogenmaß angegeben, mit $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dem Ursprung kann kein Winkel zugeordnet werden.

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$

Damit erhalten wir: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

Die **Polardarstellung von** z lautet damit

$$z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

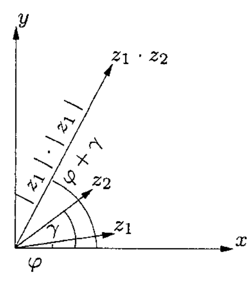
Beispiel. $z = 1 + i$ liefert $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Seien $z_1 = a + bi = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_2 = c + di = r_2(\cos\psi + i\sin\psi)$

Unter Anwendung von Additionstheoremen für Winkelfunktionen erhalten wir

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$$

Dies bedeutet geometrisch, dass bei der Produktbildung die Beträge multipliziert, und die Argumente addiert werden.



Für die Division (Herleitung siehe Skriptum) erhalten wir

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$

Hier werden also die Beträge dividiert, und die Argumente subtrahiert.

Bemerkung. Aus der Multiplikation ergibt sich sofort für

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dass

$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ bzw. allgemein für $n \in \mathbb{N}$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (**Formel von Moivre**)

Wurzelziehen in $\mathbb{C}$

Gegeben sei eine komplexe Zahl $w \neq 0$. Gesucht ist ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir schreiben $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$ und $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und erhalten

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$

Wegen $|z^n| = |z|^n = |w|$ gilt $r^n = \varrho$ bzw. $r = \sqrt[n]{\varrho}$.

Weil $\cos(\psi + 2k\pi) = \cos\psi = \cos n\varphi$ und $\sin(\psi + 2k\pi) = \sin\psi = \sin n\varphi$ gelten muss, erhalten wir insgesamt n **verschiedene** Möglichkeiten für den Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$, nämlich

$\varphi_k = \frac{\psi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Somit erhalten wir die Darstellung aller $n-$ten Wurzeln

$z_k = \sqrt[n]{\varrho}(\cos\frac{\psi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi+2k\pi}{n})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Für $k = 0$ ergibt sich der **Hauptwert** mit $z_0 = \sqrt[n]{\varrho}(\cos\frac{\psi}{n} + i\sin\frac{\psi}{n})$.

Die $n-$ten Wurzeln liegen alle auf einem Kreis und bilden regelmäßigs $n-$Eck.

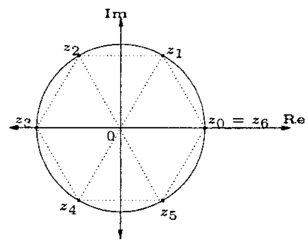
Beispiel. (Einheitswurzeln)

Wir betrachten $z^n = 1$. Dann ist $w = 1$, $\varrho = |w| = 1$, $\psi = 0$.

Offenbar ist dann

$$z_0 = \sqrt[n]{1} \cdot (\cos \tfrac{0}{n} + i \sin \tfrac{0}{n}) = 1$$
$$z_1 = \sqrt[n]{1} \cdot (\cos \tfrac{2\pi}{n} + i \sin \tfrac{2\pi}{n}) = (\cos \tfrac{2\pi}{n} + i \sin \tfrac{2\pi}{n})$$
$$z_2 = \sqrt[n]{1} \cdot (\cos \tfrac{4\pi}{n} + i \sin \tfrac{4\pi}{n}) = (\cos \tfrac{4\pi}{n} + i \sin \tfrac{4\pi}{n}) \quad \ldots \text{ etc.}$$

Speziell für $n = 6$ erhalten wir



Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Für jedes Polynom $n-$ten Grades $(n \geq 1)$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

besitzt die Gleichung $P(x) = 0$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen. Dabei werden Mehrfachlösungen mit der entsprechenden Vielfachheit gezählt.

Sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reell, so tritt mit jeder Lösung z auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ als Lösung auf.

Beispiel. Man bestimme die Lösungen von $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Wir setzen $u = z^2$ und erhalten $u^2 + u + 1 = 0$. Daraus ergeben sich

$$u_1 = \tfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{und} \quad u_2 = \tfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} .$$

Aus $z^2 = u_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ erhält man durch Wurzelziehen

$$z_1 = \sqrt{1}(\cos \tfrac{\pi}{3} + i \sin \tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i$$
$$z_2 = \sqrt{1}(\cos(\tfrac{\pi}{3} + \pi) + i \sin(\tfrac{\pi}{3} + \pi)) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i$$

Aus $z^2 = u_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ erhält man durch Wurzelziehen

$$z_3 = \sqrt{1}(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_4 = \sqrt{1}(\cos(\tfrac{2\pi}{3} + \pi) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3} + \pi)) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$