

## 5. Übungsblatt – Gruppe A

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79.  $f(x) = 64x^2 - 16x$

81.  $f(x) = \frac{x^{2/3}}{4}(x+40)$

83.  $f(x) = (4x-1)^{1/3}$

80.  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

82.  $f(x) = |12+4x-x^2|$

84.  $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^4}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{3x^2-x+2}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+4}}{\sin 2x}$ ,

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ , e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ , f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right)$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = \sqrt{2x+1}, \quad f_3(x) = \tan x$$

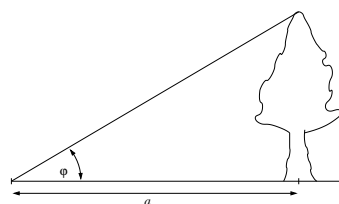
87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{3/4}$$

für  $x$  in der Nähe von  $x_0 = 16$ , um den Wert von  $f(15.96)$  zu approximieren.

88. Die Höhe eines Baumes wird dadurch bestimmt, dass man den Höhenwinkel  $\varphi$  zur Spitze des Baumes von einem Punkt, der  $a = 22\text{m}$  vom Baum entfernt ist, misst.



Man berechne die Höhe des Baumes und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes, wenn der Winkel  $\varphi$  mit  $30^\circ$  und einem möglichen Fehler von  $1^\circ$  gemessen wird.

**Hinweis:** Man verwende für die Angabe der Winkel das Bogenmaß! (Weshalb?) (2)

89. Man bestimme das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für folgende Funktionen: je (2)

$$f(x) = x^4 + 3x - 1, n = 4, x_0 = 1, \quad g(x) = a^x, a > 0, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für (2)

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion  $\cos x$ , bilde den Ausdruck  $1 - \cos x$  und dividiere diesen dann durch  $x^2$ .

91. Man ermittle das Taylorpolynom  $P_n(x)$  von (2)

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

um  $x_0 = 1$  für  $n = 1, 2, 3$  und vergleiche die Werte von  $f(0.99)$  und  $P_n(0.99)$ .

92. Man verwende das Taylorpolynom  $P_4(x)$  (mit  $x_0 = 0$ ) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen (2)

$$\int_0^{0.5} \sin^2 x \, dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis  $I \approx 0.0396323$ .

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei (2)

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & 0 & 3 \\ \hline y & 15 & 2 & -3 \end{array}$$

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle  $x = 1$ .  
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom  $P_2(x)$ , das an den Stellen  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$  mit der Funktion (2)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion  $f$  und das Polynom  $P_2$  graphisch dar.

Man vergleiche die Werte  $f(2)$  und  $P_2(2)$ .

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke

je (2)

(a)  $y = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 3$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4t \\ 3-3t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

(c)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$

(d)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \ln t \\ t + 1/t \end{pmatrix}, \quad 1 \leq t \leq 4$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

(2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 + \cos t \\ 2 + \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt  $\vec{x}(t_0)$

je (2)

(a)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

(2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t/3) + \cos(\frac{2}{3}t) \\ 2 \sin(t/3) - \sin(\frac{2}{3}t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 6\pi \quad (\text{Hypozykloide})$$

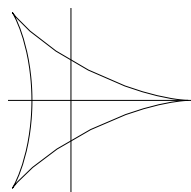


Abbildung 1: Hypozykloide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen je **1**

$$a) f(x, y) = \sqrt{y-x} \quad b) f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2) \quad c) f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  der folgenden Funktionen je **1**

$$a) f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + xy^2 \quad b) f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \quad c) f(x, y) = \arctan(x\sqrt{y})$$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von **1**

$$f(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

102.  $\alpha$ ) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion  $f$  im Punkt  $P_0$  in Richtung des Punktes  $Q$ . **2**

$\beta$ ) In welche Richtung hat  $f$  von  $P_0$  aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? **1**

$$a) f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}, P_0(3, 4), Q(7, 1), \quad b) f(x, y) = \sin(xy), P_0(1, 0), Q(2, 1)$$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $P_0$  für **2**

$$f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, P_0(3, 0)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man  $\operatorname{div}\vec{v}$ ,  $\operatorname{rot}\vec{v}$  und  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$  **2**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

## 5. Übungsblatt – Gruppe B

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79.  $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

81.  $f(x) = \frac{x}{4}(x - 40)^{2/3}$

83.  $f(x) = (x - 3)^{1/3}$

80.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

82.  $f(x) = |-3 + 4x - x^2|$

84.  $f(x) = \frac{10(x^2 - 1)}{x^5}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 9}{2x^2 + 3x + 1}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sqrt{1 - \sin x}}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x - 2}$ , e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x^2}$ , f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 2, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad f_3(x) = \cos 3x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{2/3}$$

für  $x$  in der Nähe von  $x_0 = 8$ , um den Wert von  $f(7.97)$  zu approximieren.

88. Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks wird mit dem Wert  $s = 6\text{m}$  gemessen, wobei der Messfehler maximal  $1\text{cm}$  beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Flächeninhalts dieses Dreiecks auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für ②

$$f(x) = \cos \frac{x}{2}, n = 8, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion  $\cos x$  und ersetze dann  $x$  durch  $x/2$ .

91. Man ermittle das Taylorpolynom  $P_n(x)$  von ②

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um  $x_0 = 1$  für  $n = 1, 2, 3$  und vergleiche die Werte von  $f(1.01)$  und  $P_n(1.01)$ .

92. Man verwende das Taylorpolynom  $P_4(x)$  (mit  $x_0 = 0$ ) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis  $I \approx 0.601044$ .

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 1 & 3 \\ \hline y & 2 & -1 & 4 \end{array}$$

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle  $x = 2$ .  
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom  $P_2(x)$ , das an den Stellen  $x_1 = 0, x_2 = \pi/6, x_3 = \pi/4$  mit der Funktion ②

$$f(x) = \sin x$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion  $f$  und das Polynom  $P_2$  graphisch dar.  
Man vergleiche die Werte  $f(1)$  und  $P_2(1)$ .

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a)  $y = \frac{4}{3}x^{3/2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 2$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12t \\ 5t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$(c) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(d) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \sin t \\ t \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt  $\vec{x}(t_0)$

je ②

$$(a) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

$$(b) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \tan t + \sin t \end{pmatrix}, \quad \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2 \quad (\text{Konchoide, linker Ast})$$

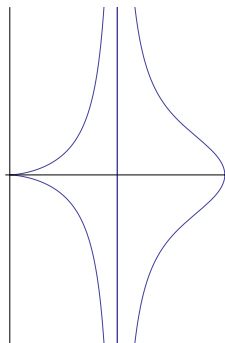


Abbildung 2: Konchoide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

$$a) \quad f(x, y) = \sqrt{x + y} \quad b) \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) \quad c) \quad f(x, y) = \frac{x - 3y}{x + 3y}$$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  der folgenden Funktionen je **1**

$$a) \quad f(x, y) = 6x^2 + 4xy^2 - y^3 \quad b) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad c) \quad f(x, y) = x e^{y/x}$$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von **1**

$$f(x, y) = \ln(3x + 5y)$$

102.  $\alpha)$  Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion  $f$  im Punkt  $P_0$  in Richtung des Punktes  $Q$ . **2**

$\beta)$  In welche Richtung hat  $f$  von  $P_0$  aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? **1**

$$a) \quad f(x, y) = x e^y, \quad P_0(2, 0), \quad Q\left(\frac{1}{2}, 2\right), \quad b) \quad f(x, y) = \ln(2x+3y), \quad P_0(-1, 1), \quad Q(2, 3)$$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $P_0$  für **2**

$$f(x, y) = x\sqrt{y}, \quad P_0(1, 4)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man  $\operatorname{div}\vec{v}$ ,  $\operatorname{rot}\vec{v}$  und  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$  **2**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + yz \\ xy - \sqrt{z} \end{pmatrix}$$



## 5. Übungsblatt – Gruppe C

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79.  $f(x) = x^3 + x$

81.  $f(x) = \frac{x^{2/3}}{16}(x^2 - 16)$

83.  $f(x) = (1 - 3x)^{2/3}$

80.  $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$

82.  $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

84.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \pi/6}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{3x^2 - x + 2}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin^2 x}{1 - \cos x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x}{x}$ , e)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$ , f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^3 - x, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad f_3(x) = \sin 2x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{13}$$

für  $x$  in der Nähe von  $x_0 = 1$ , um den Wert von  $f(1.02)$  zu approximieren.

88. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert  $r = 21\text{cm}$  gemessen, wobei der Messfehler maximal  $0.05\text{cm}$  beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - x, n = 4, x_0 = 2, \quad g(x) = \sqrt{1+x}, n = 4, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für ②

$$f(x) = e^{x^2}, n = 10, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion  $e^x$  und ersetze dann  $x$  durch  $x^2$ .

91. Man ermittle das Taylorpolynom  $P_n(x)$  von ②

$$f(x) = \sqrt{x}$$

um  $x_0 = 1$  für  $n = 1, 2, 3$  und vergleiche die Werte von  $f(0.98)$  und  $P_n(0.98)$ .

92. Man verwende das Taylorpolynom  $P_4(x)$  (mit  $x_0 = 0$ ) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis  $I \approx 0.493107$ .

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

$x$	1	3	5
$y$	-2	-1	1

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle  $x = 0$ .  
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom  $P_2(x)$ , das an den Stellen  $x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$  mit der Funktion ②

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion  $f$  und das Polynom  $P_2$  graphisch dar.  
Man vergleiche die Werte  $f(2.3)$  und  $P_2(2.3)$ .

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a)  $y = 2x^{2/3}, \quad 1 \leq x \leq 8$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 + 3t \\ 2 - 4t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$

(c)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 + \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(d)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \\ t^3/3 \end{pmatrix}$$

von  $P(0, 0, 0)$  nach  $Q(18, 0, 9)$ .

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt  $\vec{x}(t_0)$

je ②

(a)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/2$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos^3(t/4) \\ \sin^3(t/4) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 8\pi \quad (\text{Asteroide})$$

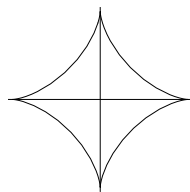


Abbildung 3: Asteroide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

a)  $f(x, y) = \sqrt{2x + y}$     b)  $f(x, y) = \ln(4 - 4x^2 - y^2)$     c)  $f(x, y) = \frac{x - 4y}{x + 4y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  der folgenden Funktionen

je ①

a)  $f(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 + xy^4$     b)  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$     c)  $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von

①

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

102.  $\alpha$ ) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion  $f$  im Punkt  $P_0$  in Richtung des Punktes  $Q$ .

②

$\beta$ ) In welche Richtung hat  $f$  von  $P_0$  aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg?

①

a)  $f(x, y) = x y^2$ ,  $P_0(3, 2)$ ,  $Q(-1, -1)$ ,      b)  $f(x, y) = y \ln x$ ,  $P_0(1, -3)$ ,  $Q(5, 0)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $P_0$  für

②

$$f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad P_0(6, 3)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man  $\operatorname{div} \vec{v}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{v}$  und  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})$

②

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xyz \\ 0 \\ -x^2y \end{pmatrix}$$

## 5. Übungsblatt – Gruppe D

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79.  $f(x) = 2 - x - x^3$

81.  $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 7)$

83.  $f(x) = (2x - 1)^{2/3}$

80.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

82.  $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$

84.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{3x - 5}$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x + 3}$ ,    e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cot 3x$ ,    f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = 1 - x^2, \quad f_2(x) = \sqrt{1 - 2x}, \quad f_3(x) = \cot x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{17}$$

für  $x$  in der Nähe von  $x_0 = 1$ , um den Wert von  $f(1.03)$  zu approximieren.

88. Man berechne den maximalen relativen Fehler bei der Bestimmung des Volumens eines Würfels mit der Kantenlänge  $a = 1\text{m}$ , wenn die Länge der Kante auf 3% genau gemessen wurde.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 2x, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \tan x, n = 5, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für ②

$$f(x) = x e^{-x}, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Zunächst verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion  $e^x$  und ersetze dann  $x$  durch  $-x$ . Danach multipliziere man das Ergebnis mit  $x$ .

91. Man ermittle das Taylorpolynom  $P_n(x)$  von ②

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

um  $x_0 = 1$  für  $n = 1, 2, 3$  und vergleiche die Werte von  $f(1.02)$  und  $P_n(1.02)$ .

92. Man verwende das Taylorpolynom  $P_4(x)$  (mit  $x_0 = 0$ ) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis  $I \approx 0.197365$ .

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

$x$	2	4	6
$y$	-12	-8	-9

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle  $x = 3$ .  
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom  $P_2(x)$ , das an den Stellen  $x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/3, x_3 = \pi/2$  mit der Funktion ②

$$f(x) = \cos x$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion  $f$  und das Polynom  $P_2$  graphisch dar.

Man vergleiche die Werte  $f(1.8)$  und  $P_2(1.8)$ .

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a)  $y = [4 - (x - 8)^{2/3}]^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 7$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12(1-t) \\ 5(t+2) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 3$

(c)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

(d)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

von  $P(1, 0, 0)$  nach  $Q(2, 1, 1)$ .

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt  $\vec{x}(t_0)$

je ②

(a)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi/4$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t/3) + \cos(\frac{2}{3}t) \\ 2 \sin(t/3) - \sin(\frac{2}{3}t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 6\pi \quad (\text{Hypozykloide})$$

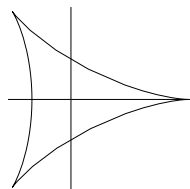


Abbildung 4: Hypozykloide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

a)  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$     b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$     c)  $f(x, y) = \frac{x - 3y}{x + 3y}$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  der folgenden Funktionen

je ①

a)  $f(x, y) = 2x^4 - x^2y^2 + y^4$     b)  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 - y^2}$     c)  $f(x, y) = y^2 e^{xy}$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von ①

$$f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$$

102.  $\alpha$ ) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion  $f$  im Punkt  $P_0$  in Richtung des Punktes  $Q$ . ②

$\beta$ ) In welche Richtung hat  $f$  von  $P_0$  aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg? ①

a)  $f(x, y) = x e^y$ ,  $P_0(2, 0)$ ,  $Q(\frac{1}{2}, 2)$ ,      b)  $f(x, y) = \ln(2x+3y)$ ,  $P_0(-1, 1)$ ,  $Q(2, 3)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $P_0$  für ②

$$f(x, y) = x\sqrt{y}, \quad P_0(1, 4)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man  $\operatorname{div}\vec{v}$ ,  $\operatorname{rot}\vec{v}$  und  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})$  ②

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix}$$



## 5. Übungsblatt – Gruppe GEO

78. Man ermittle die ersten drei Ableitungen der Funktion

②

$$f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$$

Man bestimme die Lage und den Typ der relativen Extrema ① und der Wendepunkte ① der folgenden Funktionen und fertige eine Skizze ① des Graphen der Funktion an.

79.  $f(x) = x^3 + x$

81.  $f(x) = \frac{x^{2/3}}{16}(x^2 - 16)$

83.  $f(x) = (1 - 3x)^{2/3}$

80.  $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$

82.  $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

84.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

85. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

je ②

a)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{3x - 5}$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + 4x + 3}$ ,    e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cot 3x$ ,    f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$

86. Man ermittle das Differential der folgenden Funktionen

②

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad f_3(x) = \tan x$$

87. Man verwende die lineare Approximation von

②

$$f(x) = x^{2/3}$$

für  $x$  in der Nähe von  $x_0 = 8$ , um den Wert von  $f(7.97)$  zu approximieren.

88. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert  $r = 21\text{cm}$  gemessen, wobei der Messfehler maximal  $0.05\text{cm}$  beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann.

②

89. Man bestimme das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für folgende Funktionen:

je ②

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 2x, n = 4, x_0 = -1, \quad g(x) = \tan x, n = 5, x_0 = 0$$

90. Unter Verwendung bekannter Taylorpolynome berechne man das Taylorpolynom  $P_n(x)$  vom Grad  $n$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$  für ②

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, n = 6, x_0 = 0$$

Hinweis: Verwende man das entsprechende Polynom für die Funktion  $\cos x$ , bilde den Ausdruck  $1 - \cos x$  und dividiere diesen dann durch  $x^2$ .

91. Man ermittle das Taylorpolynom  $P_n(x)$  von ②

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um  $x_0 = 1$  für  $n = 1, 2, 3$  und vergleiche die Werte von  $f(1.01)$  und  $P_n(1.01)$ .

92. Man verwende das Taylorpolynom  $P_4(x)$  (mit  $x_0 = 0$ ) des Integranden, um folgendes Integral näherungsweise zu berechnen ②

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin x}{x} dx$$

und vergleiche den gewonnenen Wert mit dem Ergebnis  $I \approx 0.493107$ .

93. Approximieren Sie die folgenden Stützpunkte mit einem LAGRANGE'schen Interpolationspolynom vom Rang zwei ②

$x$	2	4	6
$y$	-12	-8	-9

und bestimmen Sie den Interpolationswert an der Stelle  $x = 3$ .  
Stellen Sie die Punkte und das Polynom graphisch dar.

94. Man ermittle das LAGRANGE'sche Interpolationspolynom  $P_2(x)$ , das an den Stellen  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$  mit der Funktion ②

$$f(x) = \sqrt{x}$$

übereinstimmt.

Stellen Sie die Funktion  $f$  und das Polynom  $P_2$  graphisch dar.  
Man vergleiche die Werte  $f(2)$  und  $P_2(2)$ .

95. Man berechne die Bogenlänge der folgenden ebenen Kurvenstücke je ②

(a)  $y = [4 - (x - 8)^{2/3}]^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 7$

(b)  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12(1-t) \\ 5(t+2) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 3$

$$(c) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$(d) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

96. Man ermittle die Bogenlänge des folgenden Stücks der Raumkurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \sin t \\ t \\ 2 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

97. Gesucht ist die Gleichung der Tangente an die Kurve im gegebenen Punkt  $\vec{x}(t_0)$

je ②

$$(a) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 3\pi/4$$

$$(b) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t_0 = \pi$$

98. Man bestimme alle singulären Punkte der Kurve

②

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t - \cos(2t) \\ 2 \sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{Kardioide})$$

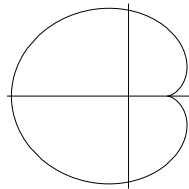


Abbildung 5: Kardioide

99. Man ermittle den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

je ①

$$a) \quad f(x, y) = \sqrt{x - y} \quad b) \quad f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2) \quad c) \quad f(x, y) = \frac{x - 2y}{x + 2y}$$

100. Man berechne die ersten partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  der folgenden Funktionen

je ①

$$a) \quad f(x, y) = 6x^2 + 4xy^2 - y^3 \quad b) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad c) \quad f(x, y) = x e^{y/x}$$

101. Man bestimme alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von

①

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

102.  $\alpha$ ) Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion  $f$  im Punkt  $P_0$  in Richtung des Punktes  $Q$ .

②

$\beta$ ) In welche Richtung hat  $f$  von  $P_0$  aus gesehen den stärksten Funktionsanstieg? Wie groß ist dieser Funktionsanstieg?

①

a)  $f(x, y) = \sqrt{5x - 4y}$ ,  $P_0(4, 1)$ ,  $Q(3, 2)$ ,    b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $P_0(1, -1)$ ,  $Q(2, -2)$

103. Man ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $P_0$  für

②

$$f(x, y) = e^x \cos(xy), \quad P_0(0, 0)$$

104. Für folgendes Vektorfeld berechne man  $\operatorname{div} \vec{v}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{v}$  und  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})$

②

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ -xy \end{pmatrix}$$