Crashkurs - Integration

Bemerkung. Wir setzen hier elementare Kenntnisse des Differenzierens sowie der Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel voraus (diese werden später in der VO noch ausführlich erklärt).

1. Das unbestimmte Integral

Definition. Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** zur Funktion $f(x)$, falls gilt

$$F'(x) = f(x) \ .$$

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ nennt man **unbestimmtes Integral** von $f(x)$, und verwendet auch die Schreibweise

$$\int f(x)\, dx \ .$$

Bemerkungen.

1. Offenbar sind $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$ und $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 4$ Stammfunktionen zu $f(x) = x^2$.

2. Sind allgemein $F_1(x), F_2(x)$ Stammfunktionen zu $f(x)$, dann unterscheiden sich diese höchstens um eine additive Konstante, d.h.

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Die Menge aller Stammfunktionen zu $f(x)$ lässt sich damit in der Form

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

ausdrücken, wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion zu $f(x)$ ist und $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante.

3. Jede auf einem Intervall I stetige Funktion $f(x)$ besitzt dort eine Stammfunktion.

4. Durch Differentiation von Funktionen lassen sich umgekehrt einige

Stammfunktionen sofort angeben.

Weil $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$ und $(\frac{x^{n+1}}{n+1})' = x^n$, sind

$\int e^x \; dx = e^x + C$, $\int \cos x \; dx = \sin x + C$ und $\int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Rechenregeln.

1. $\int (f(x) + g(x)) \; dx = \int f(x) \; dx + \int g(x) \; dx = F(x) + G(x) + C$

2. $\int c \cdot f(x) \; dx = c \cdot \int f(x) \; dx = c \cdot F(x) + D$

3. **Partielle Integration**

   $\int f'(x) \cdot g(x) \; dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \; dx$

Beispiele.

1. $\int (x + \sin x) \; dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$

2. $\int 5 \cos x \; dx = 5 \int \cos x \; dx = 5 \sin x + C$

3. Betrachte $I = \int \ln x \; dx = \int 1 \cdot \ln x \; dx$

Setze $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln x$. Dann ist $f(x) = x$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Damit ist $I = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; dx = x \ln x - \int 1 \; dx = x \ln x - x + C$.

Die **Integration mittels Substitution** werden wir mittels eines Beispiels erläutern.

Betrachte $I = \int x \cos(x^2 + 1) \; dx$.

Wir führen nun in geeigneter Weise eine neue Variable $u = g(x)$ bzw. $x = g(u)$ ein, sodass ein Integral in dieser neuen Variablen entsteht, welches einfacher zu lösen ist. (x darf in diesem neuen Integral nicht mehr auftauchen!)

Sei $u = x^2 + 1$. Dann ist $\frac{du}{dx} = 2x$ und (formal) $dx = \frac{du}{2x}$.

Also $I = \int x \cos u \; \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \cos u \; du = \frac{1}{2} \sin u + C$.

Nun erfolgt die Rücksubstitution und wir erhalten

$I = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + C$.

Bemerkung. Bei zahlreichen Integralen besteht die "Kunst" darin, eine geeignete Substitution zu finden.

Eine **rationale Funktionen** ist ein Quotient von zwei Polynomen,

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Zum Beispiel $r(x) = \frac{x^5-1}{x^3+2x-2}$.

Ist der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms, muß zuerst eine Polynomdivision durchgeführt werden, und danach eine Partialbruchzerlegung, um einfachere Integrale zu erhalten.

Exemplarisch betrachten wir $I = \int \frac{2x^3-3x^2-x-1}{x^2-x}\,dx$.

(Die allgemeine Situation ist etwas umfangreicher und wird später in der VO behandelt.)

$r(x) = \frac{2x^3-3x^2-x-1}{x^2-x} = 2x-1+\frac{-1-2x}{x^2-x} = 2x-1+\frac{-1-2x}{x(x-1)}$.

Wir treffen nun den Ansatz $\frac{-1-2x}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$.

Dann ist $-1-2x = A(x-1)+Bx = x\cdot(A+B) - A$.

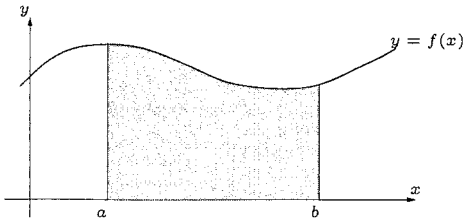
Koeffizientenvergleich liefert $A = 1$, $A+B = -2 \Rightarrow B = -3$

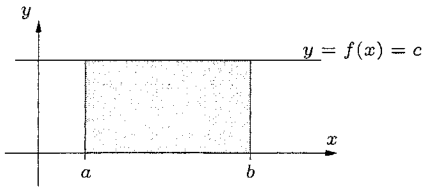
Also ist $\frac{-1-2x}{x(x-1)} = \frac{1}{x} - 3\frac{1}{x-1}$ und

$I = \int (2x-1+\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x-1})\,dx = x^2 - x + \ln|x| - 3\ln|x-1| + C$

2. Das bestimmte Integral

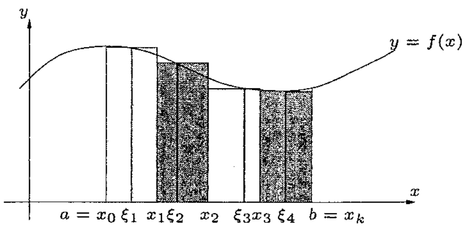
Zum Begriff des bestimmten Integrals kommt man über die Fragestellung nach dem Flächeninhalt unter einer Kurve $f(x)$.





Durch Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ erhält man Unter- bzw. Obersummen, und durch eine geeignete Grenzwertbildung ergibt sich

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Bemerkung. Im Falle $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$ ergibt sich dabei der Flächeninhalt unter der Kurve im Intervall $[a, b]$.

Im allgemeinen Fall ist beim Aufsummieren auf das Vorzeichen zu achten (negative Flächen unter der $x-$Achse). Hier ist der Flächeninhalt durch $\int_a^b |f(x)|\,dx$ gegeben.

Zudem ist zu beachten, dass das "orientierte" Intervall $[a, b]$ betrachtet wird.

Eigenschaften.

1. $\int_a^b c\,dx = (b - a) \cdot c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

2. $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3. Ist $f(x) \leq g(x)$ auf $[a,b]$, dann $\int\limits_a^b f(x)\ dx \leq \int\limits_a^b g(x)\ dx$

4. $|\int\limits_a^b f(x)\ dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\ dx$

5. $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx$ für $a \leq c \leq b$

6. $\int\limits_b^a f(x)\ dx = -\int\limits_a^b f(x)\ dx$ für $a \leq b$, $\int\limits_a^a f(x)\ dx = 0$

7. $\frac{d}{dx}(\int\limits_a^x f(t)\ dt) = f(x)$, $a \in \mathbb{R}$

Die beiden wichtigsten Sätze an dieser Stelle sind

Satz. (**Mittelwertsatz der Integralrechnung**)

Ist $f(x)$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a,b]$, dann existiert eine Stelle $c \in [a,b]$ mit der Eigenschaft

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\ dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int\limits_a^b f(x)\ dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Satz. (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)

Ist $f(x)$ stetig auf dem Intervall $[a,b]$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann ist

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = F(x)\,\big|_a^b$$

Beispiel. Gesucht ist die Fläche zwischen der Parabel $y = x^2$ und der $x-$Achse im Intervall $[-1,1]$.

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

Bemerkung. Das Verfahren der partiellen Integration gilt auch im Falle von bestimmten Integralen.

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Bei der Anwendung der Substitutionsregel wird zuerst das unbestimmte Integral berechnet und nach Rücksubstitution die Grenzen eingesetzt, oder die Grenzen werden zu Beginn mitsubstituiert.

Beispiel. $I = \int\limits_{x=1}^{3} 2\sqrt{2x+1} \, dx$

Substitution: $\quad u = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2} du$

Grenzen: $\quad x = 1 \;\Rightarrow\; u = 3 \;\;,\;\; x = 3 \;\Rightarrow\; u = 7$

Also $\quad I = \int\limits_{u=3}^{7} \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_3^7 = \frac{2}{3}(7^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}})$.

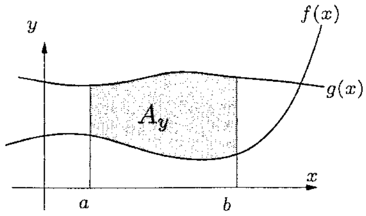
Definition. Ein Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$, der in der Form

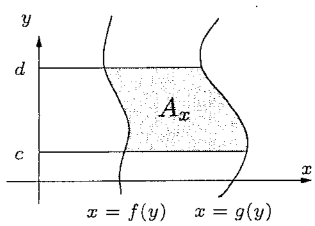
$$B = \{(x, y) \;:\; a \leq x \leq b \;\;,\;\; f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

beschrieben werden kann, nennt man einen **Normalbereich bzgl. der** $y-$**Richtung**.

Analog dazu ist ein **Normalbereich bzgl. der** $x-$**Richtung** beschreibbar durch

$$B = \{(x, y) \;:\; c \leq y \leq d \;\;,\;\; f(y) \leq x \leq g(y)\}$$

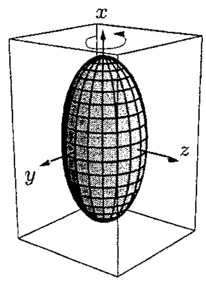




Bemerkung. Für den Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven gilt

$$A_y = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \quad \text{bzw.} \quad A_x = \int_c^d (g(y) - f(y))\,dy$$

Bemerkung. Rotiert eine Kurve $y = f(x)$ um die $x-$Achse bzw. die Kurve $x = g(y)$ um die $y-$Achse, erhalten wir einen Drehkörper im Raum.



Für das Volumen des Drehkörpers gilt dann

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$$

Doppelintegrale. (siehe Mathematik 2)

Sei $B = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f(x,y)$ eine Funktion von zwei Veränderlichen.

Das Doppelintegral $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy$ über den Rechtecksbereich B wird ähnlich wie im eindimensionalen Fall durch Zerlegungen in kleinere Rechtecksbereiche und Bildung von Ober- bzw. Untersummen gebildet.

Im speziellen ergibt sich im Falle von $f(x,y) \geq 0$ (auf B) das Volumen unter der Fläche $z = f(x,y)$ und der $xy-$Ebene.

Die ursprüngliche Definition des Doppelintegrals für Rechtecksbereiche kann dann auf allgemeinere Bereiche $B \subseteq \mathbb{R}^2$ erweitert werden.

Die wichtigste Aussage für die konkrete Berechnung von Doppelintegralen betrifft den Fall, wo der Bereich B ein Normalbereich ist.

Satz. Sei $B = \{(x,y) \ : \ a \leq x \leq b \ , \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ ein Normalbereich bzgl. der $y-$Richtung. Dann ist

$$\iint\limits_B f(x,y)\ dxdy = \int\limits_{x=a}^{b} [\int\limits_{y=f(x)}^{g(x)} f(x,y)\ dy]\ dx$$

D.h. das Doppelintegral kann durch Hintereinanderausführung von zwei eindimensionalen Integralen bestimmt werden.

Bemerkung. Ist $B = \{(x,y) \ : \ c \leq y \leq d \ , \ f(y) \leq x \leq g(y)\}$ ein Normalbereich bzgl. der $x-$Richtung, gilt analog

$$\iint\limits_B f(x,y)\ dxdy = \int\limits_{y=c}^{d} [\int\limits_{x=f(y)}^{g(y)} f(x,y)\ dx]\ dy$$

Beispiel. Man bestimme $I = \iint\limits_B (x+2y)\ dxdy$, wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0)$ und $(0,2)$ ist.

Die Gerade durch die Punkte $(0,2)$ und $(1,0)$ ist durch $2x + y = 2$ gegeben.

B ist ein Normalbereich, i.e. $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq -2x+2$.

$$I = \int\limits_{x=0}^{1} [\int\limits_{y=0}^{-2x+2} (x+2y)\ dy]\ dx = \int\limits_{x=0}^{1} [(xy+y^2)\,|_{y=0}^{-2x+2}]\ dx =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} (x(-2x+2) + (-2x+2)^2)\ dx = \int\limits_{x=0}^{1} (2x^2 - 6x + 4)\ dx =$$

$= (\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x)\,|_{x=0}^{1} = \frac{5}{3}$

Bemerkung. Einer Substitution entspricht hier eine sogenannte Koordinatentransformation.

Oft verwendet wird der Übergang zu Polarkoordinaten $(x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi)$, wenn dadurch der Bereich einfacher beschrieben werden kann.

Wichtig dabei:
Das "Flächenelement" $dxdy$ wird ersetzt durch $r \cdot drd\varphi$.

Beispiel. Man bestimme $I = \iint\limits_B \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy$, wobei B der obere Halbkreis von $x^2 + y^2 = 4$ ist.

Übergang zu Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi$

Für den Integranden gilt $\sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Der Bereich B kann beschrieben werden durch

$0 \leq r \leq 2\ ,\ 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Damit $I = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} [\int\limits_{r=0}^{2} r \cdot r\ dr]\ d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \frac{r^3}{3}\,|_{r=0}^{2}\ d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \frac{8}{3}\ d\varphi =$

$= \frac{8}{3}\varphi\,|_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{8\pi}{3}$