01. Zahlen und Ungleichungen

Die **natürlichen Zahlen** bilden die grundlegendste Zahlenmenge, die durch das einfache Zählen $1, 2, 3, \ldots$ entsteht.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (bzw. $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$)

Dabei bedeutet ":=" dass das Symbol auf der linken Seite durch die rechte Seite der Gleichung festgelegt (definiert) wird.

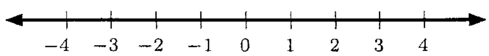
Da es in verschiedenen Zusammenhängen Sinn macht, auch von negativen Größen zu sprechen (z.B. bei der Temperaturmessung), führt man auch negative Zahlen ein und erhält damit die Menge der **ganzen Zahlen**.

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$

Betrachtet man Verhältnisse von ganzen Zahlen, erhalten wir die gebrochenen oder **rationalen Zahlen**, die sich durch Division der ganzen Zahlen ergeben. Dabei darf der Divisor nicht Null sein.

$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\ ,\ b \neq 0\}$

Die genannten Zahlenmengen lassen sich (zusammen mit der Menge der reellen Zahlen, die noch erwähnt werden) geometrisch auf der sogenannten **Zahlengeraden** darstellen.



Mit rationalen Zahlen sind vier Grundoperationen möglich,

1. Addition $(a + b)$
2. Subtraktion $(a - b)$
3. Multiplikation $(a \cdot b)$
4. Division $(\frac{a}{b})$

Die **Addition** $a + b$ zweier rationaler Zahlen kann geometrisch als das Abtragen von Strecken veranschaulicht werden:

- Die Strecke von Null bis a wird in den Zirkel genommen.

- Von b aus wird diese Strecke nach rechts (im Fall dass a positiv ist) bzw. nach links (im Fall dass a negativ ist) abgetragen.

- Das Ergebnis ist der gesuchte Wert der Summe.

Die **Subtraktion** ist durch $a - b = a + (-b)$ erklärt.

Dabei gelten die **Rechenregeln** :

$a - a = 0$ ... 0 ist das sogenannte **neutrale Element**

$a + b = b + a$ ... **Kommutativgesetz**

$a + (b + c) = (a + b) + c$ ... **Assoziativgesetz**

Die **Multiplikation in** $\mathbb{N}$ ergibt sich geometrisch als mehrfaches Aneinanderfügen orientierter Strecken

$$a \cdot b = ab = a + a + \ldots + a \quad (b\text{−mal})$$

Die **Multiplikation in** $\mathbb{Z}$ verläuft analog, allerdings sind Vorzeichenregeln zu beachten.

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) \quad , \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b \quad , \quad 0 \cdot a = 0$$

Auch hier gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{bzw.} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Die **Addition** und **Multiplikation in** $\mathbb{Q}$ sind:

$$\tfrac{a}{b} + \tfrac{c}{d} = \tfrac{ad+bc}{bd} \quad , \quad \tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{c}{d} = \tfrac{ac}{bd}$$

Weiters ist eine **Division** möglich:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ für $b, c, d \neq 0$

Weiters gilt das **Distributivgesetz**: $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Potenzen sind wie folgt erklärt:

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n\text{-mal}) \quad , \quad a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Wurzeln sind erklärt durch:

Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{a}$ jene nichtnegative Zahl b für welche $b^n = a$ gilt.

Schreibweisen: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Es stellt sich nun die Fragen, ob "Zahlen" bzw. "Größen" auftreten, die sich nicht als Bruch darstellen lassen.

Betrachen wir etwa die Diagonale d eines Quadrates mit Seitenlänge 1, dann gilt nach dem Satz von Pythagoras dass $d^2 = 2$ bzw. $d = \sqrt{2}$.

Wir nehmen nun an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, i.e. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Ferner sei angenommen, dass $\frac{a}{b}$ in gekürzter Form vorliegt, d.h. a und b haben keine gemeinsamen Teiler.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2$

Weil $2b^2 = a^2$ immer gerade ist, muss auch a gerade sein, d.h. die Form $a = 2a_1$ besitzen.

Damit gilt aber $2b^2 = 4a_1^2$ bzw. $b^2 = 2a_1^2$. Damit muss auch b gerade sein und folglich ist 2 ein gemeinsamer Teiler, ein Widerspruch!

Somit ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Die Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ kann nun geeignet erweitert werden zur Menge $\mathbb{R}$

aller **reellen Zahlen**. $\mathbb{R}$ ist die Gesamtheit aller Zahlen auf der Zahlengerade. Reelle Zahlen, welche nicht rational sind, heißen **irrational**.

$\mathbb{R}^+ \ldots$ positive reelle Zahlen (rechts vom Nullpunkt)

$\mathbb{R}^- \ldots$ negative reelle Zahlen (links vom Nullpunkt)

Also $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

Weiters gilt offenbar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Die Darstellung reeller Zahlen kann durch die Dezimalbruchentwicklung erfolgen:

$$x = (\pm) a_L a_{L-1} \ldots a_1 a_0 \ , \ a_{-1} a_{-2} \ldots \quad , \quad a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Für $\mathbb{R}$ gelten dann analoge Rechengesetze wie für $\mathbb{Q}$.

Der binomische Lehrsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Ausdruck $(a+b)^n$.

$n = 1: \quad (a+b)^1 = a + b$

$n = 2: \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$n = 3: \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad$ etc.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \tfrac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Die auftretenden Koeffizienten sind sogenannte **Binomialkoeffizienten**.

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für $n, k \in \mathbb{N}$

Dabei ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$. Dies ist zugleich die Anzahl der möglichen Anordungen von n verschiedenen Objekten. Per definition ist $0! = 1$, und man verwendet die Sprechweise n **Fakultät** bzw. n **Faktorielle**.

Es stellt sich heraus, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist.

Damit erhalten wir

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Die Binomialkoeffizienten können etwa aus dem **PASCAL'schen Dreieck** bestimmt werden.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & 1
\end{array}$$

Wir haben zuvor bereits die Symbolik für **Summe** und **Produkt** verwendet.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \text{bzw.}$$

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Ungleichungen

Der Ausdruck $a > b$ ist eine **Ungleichung** und bedeutet, dass a rechts von b liegt. Gleichbedeutend schreiben wir $b < a$.

$a \geq b$ bedeutet, dass $a > b$ oder $a = b$ ist. (Analog $b \leq a$)

Die wichtigsten Rechenregeln dazu sind:

1. $a > b$ und $b > c \quad \Rightarrow \quad a > c$
2. $a \geq a$
3. $a \geq b$ und $b \geq a \quad \Rightarrow \quad a = b$
4. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$
5. $a > b$ und $c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc$, $a > b$ und $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc$

6. $ab > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \;\text{ und }\; b > 0)$ **oder** $(a < 0 \;\text{ und }\; b < 0)$

7. $ab < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \;\text{ und }\; b < 0)$ **oder** $(a < 0 \;\text{ und }\; b > 0)$

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

der **Betrag** (bzw. **Absolutbetrag**) von x .

Dies ist geometrisch der Abstand von x zum Ursprung 0 . Also ist etwa $|2| = 2$ und $|-2| = -(-2) = 2$.

Für eine Funktion $f(x)$ ist $|f(x)| = f(x)$ für all jene x für die $f(x) \geq 0$ ist, und $|f(x)| = -f(x)$ für all jene x für die $f(x) < 0$ ist.

Also ist etwa $|x+2| = x+2$ für $x+2 \geq 0$ bzw. $x \geq -2$, und $|x+2| = -(x+2)$ für $x+2 < 0$ bzw. $x < -2$.

Es gelten dabei folgende Rechengesetze:

1. $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

2. $|a| \geq |b| \;\Leftrightarrow\; a^2 \geq b^2$

3. $|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a$, $|x| > a \;\Leftrightarrow\; x < -a$ oder $x > a$, $a \in \mathbb{R}^+$

4. $\sqrt{a^2} = |a|$ (Man verifiziere dies mit $a = 2$ und $a = -2$)

5. $|ab| = |a| \cdot |b|$, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

6. $|a+b| \leq |a| + |b|$, $|a-b| \leq |a| + |b|$ (**Dreiecksungleichung**)

Intervalle

Intervalle sind Teilstrecken auf der Zahlengeraden. Je nachdem ob die Randpunkte dazugehören oder nicht, sprechen wir von abgeschlossenen, offenen bzw. halb offenen Intervallen. Des weiteren gibt es unbeschränkte

Intervalle.

Schreibweisen:

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b\}$ (offenes Intervall)
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
4. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
5. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x\}$
6. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x \leq a\}$