11. Eigenwerte und Eigenvektoren

Bei zahlreichen Fragestellungen geht es darum, zu einer quadratischen Matrix $A \in M(n \times n)$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ zu finden, sodass die Vektoren $A \cdot \vec{v}$ und $\vec{v}$ parallel sind, d.h. man sucht einen Vektor $\vec{v}$ und eine Zahl λ derart, dass

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \neq \vec{0} \, .$$

Definition. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert (EW)** der Matrix $A \in M(n \times n)$ mit dem zugehörigen **Eigenvektor (EV)** $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, wenn

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

D.h. auch wenn wir eine reelle Matrix betrachten, können komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren mit komplexen Komponenten auftreten.

Die Bedingung $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ kann nun auch in der Form

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

geschrieben werden. Dies wiederum liefert ein lineares homogenes Gleichungssystem von n Gleichungen für die n unbestimmten Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Vektors $\vec{v}$.

Da $\vec{v} \neq \vec{0}$ sein soll, suchen wir nach **nichttrivialen** Lösungen des homogenen Gleichungssystems und dies ist dann gegeben, wenn $\operatorname{rang}(A - \lambda I) < n$ ist, bzw. wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0 \text{ ist.}$$

Definition. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ heißt das **charakteristische Polynom** und $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ die **charakteristische Gleichung**.

In anderen Worten: die Eigenwerte sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt ein Polynom vom Grad n

genau n Nullstellen, wenn man diese gemäß ihrer Vielfachheit zählt.

Treten also m verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_m$ auf, dann gilt

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdot \ldots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$$

Satz. Jede $n \times n$ Matrix besitzt genau n Eigenwerte, wenn diese gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren erfolgt damit mittels

1. Bestimme $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

2. Ermittle die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von $p(\lambda)$

3. Zu jedem Eigenwert λ_i bestimme die allgemeine Lösung des zugehörigen linearen homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Bemerkung. Liegt eine **reelle** Matrix A vor, dann treten die komplexen Eigenwerte als konjugiert komplexe Paare auf, und die zugehörigen komplexen Eigenvektoren sind ebenfalls zueinander konjugiert komplex.

Definition. Eine Matrix $A \in M(n \times n)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine reguläre Matrix $C \in M(n \times n)$ gibt, sodass

$D = C^{-1} \cdot A \cdot C$ eine Diagonalmatrix ist.

Satz. Die Matrix $A \in M(n \times n)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ besitzt.

In diesem Fall ist D gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \quad \text{Eigenwerte von } A$$

Die "diagonalisierende" Matrix C erhält man dadurch, dass man die linear unabhängigen Eigenvektoren als Spalten einträgt.

(Die "Auffüllung" der Spalten von C geschieht so, dass zuerst alle Eigenvektoren zu λ_1 verwendet werden, dann von λ_2 , etc.)

Spezialfall. Sei $A \in M(n \times n)$ eine **reelle, symmetrische** Matrix, d.h. es gilt $A^T = A$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

Satz.

1. A besitzt nur reelle Eigenwerte, d.h. das charaktieristische Polynom hat nur reelle Nullstellen.

2. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A stehen immer orthogonal aufeinander.

Zu einem Eigenwert λ_i mit der Vielfachheit k_i gibt es k_i linear unabhängige Eigenvektoren. Diese können weiters mit dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt zu einem orthonormalen System transformiert werden.

Insgesamt erhält man damit ein orthonormales System von n linear unabhängigen Eigenvektoren.

3. A kann folglich durch eine orthogonale Matrix T diagonalisiert werden, d.h.

$$T^T \cdot A \cdot T = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

In den Spalten von T stehen die orthonormierten Eigenvektoren von A .