

7.4 Die uneigentlichen Integrale 2. Art

Definition 68. Unter einem **uneigentlichen Integral 2. Art** versteht man das Integral einer stetigen Funktion f über ein unbeschränktes Intervall.

- a) $\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \dots \text{falls der Grenzwert existiert!}$
- b) $\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \dots \text{falls der Grenzwert existiert!}$
- c) $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx \quad \dots \text{falls beide Grenzwerte existieren!}$

Beispiel 134.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctan x \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctan b - \underbrace{\arctan 0}_{=0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 135. Aus dem Ergebnis von Beispiel 134. folgt mit der Bemerkung 66 (s.u.)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

Beispiel 136.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist stetig in \mathbb{R} , daher wissen wir (Satz 33.), dass zu f eine Stammfunktion

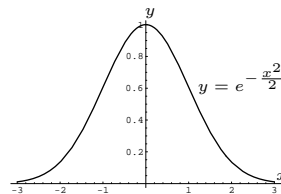


Abbildung 7.15:

existiert: $\phi(x) := \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Sie ist allerdings nicht durch elementare Funktionen darstellbar.

Es gilt (siehe Vorlesung Mathematik 2)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

7.5 Die uneigentlichen Integrale 3. Art

Definition 69. Ist das Integrationsintervall unendlich und liegt im Inneren des Integrationsintervalls zusätzlich noch eine Unendlichkeitsstelle von f vor, so handelt es sich um ein **uneigentliches Integral 3. Art**.

Beispiel 137. (s. Abb. 7.16, links)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 - 1} \quad \dots \text{ existiert nicht!!}$$