05. Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten ein System von m Gleichungen in n Unbestimmten (Unbekannten) $x_1, \ldots, x_n$ von der Form

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Dies ist ein **lineares inhomogenes Gleichungssystem**.

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ heißen **Koeffizienten** des Gleichungssystems.

- $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ wird auch als **Störvektor** bezeichnet.

- Ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, der mit seinen Komponenten das Gleichungssystem erfüllt, heißt eine **Lösung** dieses Systems.

- Ist $\vec{b} = \vec{0}$, dann liegt ein **lineares homogenes Gleichungssystem** vor.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}$$

Ansonsten heißt das System **inhomogen**. Jedes inhomogene System hat ein zugehöriges homogenes System.

Bemerkung. Es gibt folgende Möglichkeiten für die Lösungsgesamtheit eines linearen (inhomogenen) Gleichungssystems:

1. Es existiert keine Lösung.

2. Es existiert eine Lösung, sie ist jedoch nicht eindeutig bestimmt. In diesem Fall existieren unendlich viele Lösungen.

3. Es existiert genau eine Lösung.

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^3$ gibt es dazu auch eine **geometrische Interpretation**. Betrachten wir dazu ein System von drei Gleichungen in drei Unbekannten.

Jede einzelne Gleichung stellt die Gleichung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ dar.

Dann kann es sein, dass die drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt besitzen, sich entlang einer gemeinsamen Geraden schneiden, oder genau einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Definition. Eine $m \times n$ **Matrix** A ist ein rechteckiges Zahlenschema bestehend aus m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

• $M(m \times n)$ ist die Menge aller $m \times n$ Matrizen.

• $a_{ij} \in \mathbb{R}$ heisst **Element** der Matrix, es steht in der $i-$ten Zeile und der $j-$ten Spalte von A .

i bezeichnet den **Zeilenindex** $(1 \leq i \leq m)$, j bezeichnet den **Spaltenindex** $(1 \leq j \leq n)$.

• Ist die Anzahl der Spalten gleich der Anzahl der Zeilen $(m = n)$, dann liegt eine **quadratische Matrix** vor.

• Die in einer Zeile stehenden Elemente einer Matrix können zu einem Zeilenvektor zusammengefasst werden.

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = \vec{z}_i \in \mathbb{R}^n$ $\quad i-$ter **Zeilenvektor**

Analog ist $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \vec{s}_j \in \mathbb{R}^m$ der $j-$te **Spaltenvektor**.

Ein Gleichungssystem lässt sich elegant in Matrizenschreibweise darstellen. Dazu wird ein Produkt zwischen einer Matrix $A \in M(m \times n)$ und einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ wie folgt erklärt:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Damit kann nun das Gleichungssystem angegeben werden in der Form

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \ .$$

A wird dabei als **Koeffizientenmatrix** bezeichnet.

Darüber hinaus definiert man die **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A, \vec{b})$ durch

$$(A, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in M(m \times (n+1))$$

Die **Lösungsmenge** des Systems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist dann die Menge

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ A \cdot \vec{x} = \vec{b}\} \subseteq \mathbb{R}^n \ .$$

Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist der Begriff der **Zeilenstufenform** einer Matrix.

Definition. Eine Matrix A ist in **Zeilenstufenform**, wenn sie folgende Gestalt besitzt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & |\underline{a_{1j_1}} & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & & 0 & |\underline{a_{2j_2}} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & & |\underline{a_{rj_r}} & \cdots \\ 0 & & \cdots & & & & & 0 \\ \vdots & & \cdots & & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei}$$

die Stufenelemente $a_{1j_1} \neq 0 , \ldots , a_{rj_r} \neq 0$ sind.

Die über der Stufenlinie stehenden Elemente können beliebig sein. Alle unterhalb der Stufenlinie stehenden Elemente sind gleich Null.

Definition. Für eine Matrix A in Zeilenstufenform sei r die Anzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilenvektoren. Diese Anzahl definiert den **Rang von** A ,

$$\operatorname{rang} A = r \ .$$

Bemerkung. Durch Vertauschen von Spalten (dies entspricht in einem Gleichungssystem der Umnummerierung der Unbekannten) kann eine Matrix in Zeilenstufenform auf folgende Form gebracht werden

$$A' = \begin{pmatrix} \underline{a'_{11}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & |\underline{a'_{22}} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & |\ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{a'_{rr}} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man beobachtet, dass sich dadurch die Anzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilenvektoren nicht ändert, also ist $\text{rang } A = \text{rang } A'$.

Ein Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ sei nun so beschaffen, dass die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, \vec{b})$ von Zeilenstufenform ist.

$$(A, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & |\underline{a_{1j_1}} & \cdots & \cdots & & \cdots & b_1 \\
0 & \cdots & & 0 & |\underline{a_{2j_2}} & & & \cdots & b_2 \\
 & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & \\
0 & & \cdots & & 0 & & |\underline{a_{rj_r}} & \cdots & b_r \\
0 & & \cdots & & & & & 0 & b_{r+1} \\
\vdots & & \cdots & & & & & & \vdots \\
0 & & \cdots & & & & & 0 & b_m
\end{array} \right)$$

• Ist eine der Zahlen $b_{r+1}, \ldots, b_m$ ungleich Null, z.B. $b_k \neq 0$, dann lautet die $k-$te Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_k \neq 0$$, ein **Widerspruch!**

In diesem Fall ist das Gleichungssystem **nicht lösbar**, d.h. es existiert keine Lösung.

• Falls $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$, dann werden jene Unbekannte x_i , deren Index **nicht** einer Stufenkante entspricht (also $i \neq j_1, \ldots, i \neq j_r$) als frei wählbare Variable gesetzt, und die übrigen Variablen $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ können durch diese ausgedrückt werden.

Die Anzahl der frei wählbaren Variablen ist also

$$k = n - \text{rang } A = n - r \; .$$

• Sind keine Variablen frei wählbar, ist also $\text{rang } A = n$, dann spricht man von einer Matrix mit **maximalem Rang**.

• Das vorliegende Gleichungssystem ist also lösbar, wenn $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\text{rang } A = \text{rang } (A, \vec{b}) \; .$$

Ist nun ein beliebiges Gleichungssystem gegeben, dann kann dieser Fall durch Verwendung von **elementaren Zeilenumformungen** auf den zuvor diskutierten Fall zurückgeführt werden.

Dabei gibt es drei Arten der Umformung:

Typ I: Vertauschung von zwei Zeilen.

Typ II: Multiplikation der $i-$ten Zeile mit $\lambda \neq 0$ und anschließende Addition zur $k-$ten Zeile, wobei $i \neq k$.

Typ III: Multiplikation der $i-$ten Zeile mit $\lambda \neq 0$.

Satz. Jede Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen vom Typ I und vom Typ II auf Zeilenstufenform gebracht werden.

Definition. Der **Rang** einer beliebigen Matrix $A \in M(m \times n)$ ist gleich dem Rang der aus A durch elementare Zeilenumformungen entstandenen Matrix $\widetilde{A}$ von Zeilenstufenform, d.h.

$$\operatorname{rang} A := \operatorname{rang} \widetilde{A}$$

Bemerkung. Der Rang einer Matrix $A \in M(m \times n)$ ist gleich der Maximalanzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren, und dies ist zugleich auch die Maximalanzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.

Bemerkung. Sei $(A, \vec{b})$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems und $(\widetilde{A}, \widetilde{\vec{b}})$ die daraus entstandene Matrix in Zeilenstufenform.

Dann sind die Lösungsräume der Systeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{und} \quad \widetilde{A} \cdot \vec{x} = \widetilde{\vec{b}} \quad \text{gleich.}$$

Zusammenfassung.

Das zuvor diskutierte Verfahren zur Lösung eines Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $A \in M(m \times n)$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ heißt auch **Gauss Algorithmus**.

- Bilde die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, \vec{b})$ und führe diese auf Zeilenstufenform $(\widetilde{A}, \widetilde{\vec{b}})$ über.

Man nennt $\widetilde{A} \cdot \vec{x} = \widetilde{\vec{b}}$ das zugehörige **reduzierte Gleichungssystem**.

- $\widetilde{A} \cdot \vec{x} = \widetilde{\vec{b}}$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ rang $\widetilde{A} =$ rang $(\widetilde{A}, \widetilde{\vec{b}})$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ rang $A =$ rang $(A, \vec{b})$ $\Leftrightarrow$ $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar.

- Die Anzahl k der frei wählbaren Parameter ist gegeben durch $k = n - r$, $r =$ rang A .

Ist rang $A =$ rang $(A, \vec{b}) = n$, dann ist das Gleichungssystem **eindeutig lösbar**.

- $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und $\widetilde{A} \cdot \vec{x} = \widetilde{\vec{b}}$ haben die gleiche Lösungsgesamtheit.

Löse $\widetilde{A} \cdot \vec{x} = \widetilde{\vec{b}}$ rekursiv beginnend mit der letzten Gleichung.

Bemerkung. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ kann stets in der Form

$$\vec{x} = \vec{w} + \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k \quad , \quad k = n - r \ , \ r = \text{rang } A$$

geschrieben werden. Dabei sind

- $\vec{w}$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

- $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

- $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k$ ist dann die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

- Die allgemeine Lösung $\vec{x} = \vec{w} + \vec{v}$ des inhomogenen Systems setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung $\vec{v}$ des zugehörigen homogenen Systems und **einer** speziellen Lösung $\vec{w}$ des inhomogenen Systems.