15. Stetigkeit von Funktionen

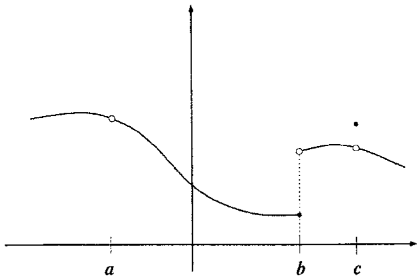
Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt **stetig im Punkt** $a \in \mathbb{D}$, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

D.h. $f(a)$ ist definiert, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und ist gleich $f(a)$.

f heißt **stetig auf einem Intervall**, wenn f in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

Beispiel.



- f ist **nicht** stetig in a , weil f dort nicht definiert ist.

(Aus der Skizze ist ersichtlich, dass wir an der Stelle a einen geeigneten Funktionswert festsetzen können, dass danach f an der Stelle a stetig ist.)

- f ist **nicht** stetig in b , weil $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ nicht existiert.

$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to b^+} f(x)$

- f ist **nicht** stetig in c , weil $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert, kann also dort (vorderhand) nicht stetig sein.

Beachte allerdings, dass $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x+1$ für $x \neq 2$.

Definieren wir den Funktionswert an der Stelle $x = 2$ mit $f(x) = 3$, dann ist f an dieser Stelle stetig. (Stetige Ergänzbarkeit)

Definieren wir den Funktionswert an der Stelle $x = 2$ mit $f(x) = 1$, dann ist f an dieser Stelle nicht stetig.

Beispiel. Betrachte $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 1 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$

f ist an der Stelle $x = 0$ nicht stetig, weil der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ nicht existiert.

Bemerkung. Von der Funktion f mögen für a sowohl der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A \in \mathbb{R}$ als auch der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = B \in \mathbb{R}$ existieren.

- Gilt $A = B = f(a)$, dann ist f stetig in a .

- Gilt $A \neq B$, dann besitzt f an der Stelle a eine **Sprungstelle** und die Differenz $|A - B|$ heißt **Sprunghöhe**.

Satz.

1. Konstante Funktionen sind stetig.

2. Summe, Differenz und Produkt von stetigen Funktionen sind wieder stetig.

3. Der Quotient $\frac{f}{g}$ zweier stetiger Funktionen ist für alle x mit $g(x) \neq 0$ stetig.

4. Die Komposition von stetigen Funktionen ist wieder stetig.

5. Ist f stetig an der Stelle b und gilt $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, dann gilt

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Folgerung. Ein Polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, i.e. stetig in jedem $x \in \mathbb{R}$.

Definition. Existiert der Grenzwert $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und ist $A \neq f(x_0)$ oder ist f in x_0 (zunächst noch) nicht definiert, dann heißt f in x_0 **hebbar unstetig** . Durch die Zusatzdefinition $f(x_0) = A$ wird die Funktion f in x_0 stetig ergänzt.

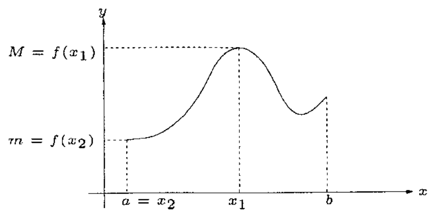
Stetige Funktionen besitzen eine Reihe von Eigenschaften, von denen die folgenden zwei zu den wichtigsten gehören.

Satz. (Weierstrass)

Ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, dann besitzt f dort ein **Maximum** und ein **Minimum**, d.h.

$$\exists\, x_1 \in [a, b] \;:\; f(x) \le f(x_1) = M \quad \forall\, x \in [a, b]$$

$$\exists\, x_2 \in [a, b] \;:\; f(x) \ge f(x_2) = m \quad \forall\, x \in [a, b]$$



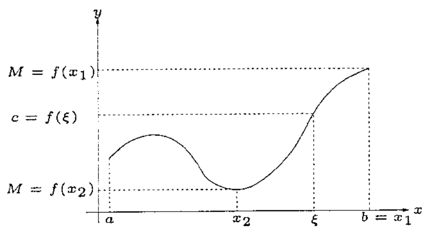
Satz. (**Zwischenwertsatz**)

Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und seien

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x) \quad , \quad m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

das Maximum und Minimum von f auf $[a, b]$.

Dann existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $m \le c \le M$ (mindestens) ein $\xi \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $f(\xi) = c$.


y
M = f(x_1)
c = f(ξ)
M = f(x_2)
a
x_2
ξ
b = x_1
x