20. Das unbestimmte Integral

Definition. Sei $f(x)$ gegeben. Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** von f , wenn

$$F'(x) = f(x)$$

Die Menge aller Stammfunktionen von f nennt man das **unbestimmte Integral** von f . Dabei verwendet man auch die Schreibweise

$$\int f(x)dx$$

Beispiel. $F_1(x) = x^3$, $F_2(x) = x^3 + 1$ und $F_3(x) = x^3 - 4$ sind Stammfunktionen zu $f(x) = 3x^2$.

Bemerkung. Seien allgemein F_1 und F_2 Stammfunktionen zu f . Dann gilt $F_1'(x) = f(x)$ und $F_2'(x) = f(x)$.

Wegen $F_1'(x) - F_2'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = 0$ folgt aus dem Mittelwertsatz, dass

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad , \ C \in \mathbb{R}$$

Das heißt: zwei Stammfunktionen zu f unterscheiden sich höchstens um eine additive Konstante. Dies wird auch in der Schreibweise

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ausgedrückt, wobei $F(x)$ irgendeine Stammfunktion ist und $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante.

Also gilt etwa $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Eine grundlegende Frage ist natürlich, welche Funktionen eine Stammfunktion besitzen. Es ist klar, dass eine differenzierbare Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion ihrer Ableitung ist. Damit lassen sich bereits eine Reihe von Stammfunktionen angeben, wie etwa

$\int \cos x dx = \sin x + C \quad , \quad \int e^x dx = e^x + C \qquad$ usf.

Ein weiteres allgemeines Ergebnis ist der folgende

Satz. Jede auf einem Intervall I stetige Funktion $f(x)$ besitzt dort eine Stammfunktion.

Es gelten folgende **Rechenregeln**:

1. Summenregel:

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$

2. Skalare Multiplikation:

$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx = c \cdot F(x) + D \quad , \; c, D \in \mathbb{R}$

3. Partielle Integration:

$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$

Diese Regel ist sinnvollerweise dann anzuwenden, wenn das Integral auf der rechten Seite leichter zu bestimmen ist als das Integral auf der linken Seite.

Die Produktregel bei der Differentiation lautet $(fg)' = f'g + fg'$.

Damit ist $f'g = (fg)' - fg'$ und

$\int f'g dx = \int [(fg)' - fg']dx = \int (fg)'dx - \int fg'dx = fg - \int fg'dx$

Eine weitere wichtige Methode zur Bestimmung von Stammfunktionen ist die Integration mittels **Substitution**. Sie ergibt sich aus der Kettenregel beim Differenzieren.

Seien die Funktionen $F(u)$ und $u = g(x)$ beide differenzierbar. Dann kann die zusammengesetzte Funktion

$\Phi(x) = F(g(x))$ betrachtet werden.

Wegen der Kettenregel ist $\Phi'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$, also ist $\Phi(x)$ eine Stammfunktion zu $F'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Also ist $\int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$.

Setzen wir also eine neue Variable mit $u = g(x)$ und ist $F(u)$ eine Stammfunktion zu $f(u)$, dann ergibt sich

$$\int F'(u)\tfrac{du}{dx}\, dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Zur praktischen Anwendung.

- Es sei der Integrand eine Funktion $h(x)$, also $\int h(x)dx$.
- Wir definieren eine neue Variable u durch $u = g(x)$.
- Dann ist $u' = \frac{du}{dx} = g'(x)$ bzw. (formal) $du = g'(x)dx$

Nun muss es gelingen, dass alle Terme, wo ein x vorkommt, verschwinden, sodass nur noch ein Integral

$\int k(u)du$ verbleibt.

- Nach Lösen dieses Integrals erfolgt die Rücksubstitution $u = g(x)$.

Beispiel. Betrachte $I = \int xe^{x^2}dx$

Setze $u = x^2$.

Dann ist $u' = \frac{du}{dx} = 2x$ bzw. $du = 2xdx$ bzw. $xdx = \frac{1}{2}du$.

Wir können damit den Ausdruck e^{x^2} durch e^u ersetzen, und den Ausdruck xdx durch $\frac{1}{2}du$, und erhalten

$$I = \int e^u \tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}\int e^u du = \tfrac{1}{2}e^u + C$$

Rücksubstitution liefert dann $I = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Beispiel. Betrachte $I = \int e^{-x^2} dx$.

Hier wäre die Substitution $u = x^2$ **nicht** zielführend. Tatsächlich ist dieses Integral elementar gar nicht lösbar.

Bemerkung. Für weitere wichtige Integrale siehe die Liste im Skriptum (Seite 114) sowie einschlägige Formelsammlungen.

. . . .

Integration rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion ist ein Quotient von zwei Polynomen. Sie kann als Summe von einfachen Brüchen, den **Partialbrüchen**, darstellt werden, was dann die Integration erleichtert.

Beispiel. Betrachte $r(x) = \frac{1}{x^2+x}$.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Im allgemeinen Fall liegt eine rationale Funktion

$$r(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

vor, wobei P_n und Q_m Polynome vom Grad n bzw. m sind.

Ist $m \geq n$, dann kann durch Polynomdivision (Euklid'scher Divisionsalgorithmus) die Situation erreicht werden, dass $r(x)$ als Summe eines Polynoms und einer rationalen Funktion, wo der Grad des Zählerpolynoms echt kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms, dargestellt werden kann.

Wir können uns daher im folgenden auf die Situation beschränken, dass für

$r(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ gilt, dass $m < n$ ist.

1. Schritt: Bestimmung der Nullstellen des Nenners

Dass Nennerpolynom $P_n(x)$ besitze die verschiedenen (reellen oder komplexen) Nullstellen

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ mit Vielfachheiten $k_1, k_2, \ldots, k_p$ $(k_1 + k_2 + \ldots k_p = n)$

Dann kann $P_n(x)$ angegeben werden in der Form

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ \ldots \ (x - x_p)^{k_p}$$

Es können nun **reelle Nullstellen** $x_i \in \mathbb{R}$ auftreten, oder **komplexe Nullstellen** $x_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \neq 0$.

Da wir ein Polynom mit reellen Koeffizienten betrachten, tritt mit einer komplexen Nullstelle $x_j = \alpha_j + i\beta_j$ auch deren konjugiert komplexe Zahl $\overline{x_j} = \alpha_j - i\beta_j$ als Nullstelle (mit der gleichen Vielfachheit) auf.

Ist $x_j \in \mathbb{C}$ (und nicht reell), dann liefert $(x - x_j)(x - \overline{x_j})$ ein reelles quadratisches Polynom $x^2 + b_jx + c_j$, das **nicht** in reelle Linearfaktoren zerlegt werden kann.

Damit erhalten wir die Darstellung

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \ldots (x^2 + b_sx + c_s)^{l_s}$$

Beispiel. Das Polynom $P_8(x)$ habe die Nullstellen

$x_1 = 1$ (3-fach) , $x_2 = -3$ (einfach) ,

$x_3 = 1 + i$ (2-fach) , $x_4 = 1 - i$ (2-fach)

Dann ist $(x - x_3)(x - x_4) = x^2 - 2x + 2$ und

$$P_8(x) = a_n(x - 1)^3(x + 3)(x^2 - 2x + 2)^2$$

2. Schritt: Ansatz für die Partialbruchzerlegung

Je nach Faktor im Nenner werden folgende Ansätze gewählt:

$x - x_i$: $\frac{A}{x-x_i}$

$(x-x_i)^r \;:\qquad \frac{A_1}{x-x_i}+\frac{A_2}{(x-x_i)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-x_i)^r}$

$x^2+bx+c \;:\qquad \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$

$(x^2+bx+c)^r \;:\qquad \frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_rx+B_r}{(x^2+bx+c)^r}$

Beispiel. Für $r(x)=\frac{x^5+3x^3-7}{(x-1)^3(x+3)(x^2-2x+2)^2}$ ergibt sich

$$r(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B}{x+3}+\frac{C_1x+D_1}{x^2-2x+2}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2-2x+2)^2}$$

Die 8 Größen $A_1,A_2,A_3,B,C_1,C_2,D_1,D_2$ wären nun in weiterer Folge zu bestimmen.

3. Schritt: Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung

Wir haben nun auf der linken Seite $r(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ und auf der rechten Seite den korrespondierenden Ansatz stehen (siehe auch Beispiel vorher).

Diese Gleichung wird jetzt mit dem Nenner $P_n(x)$ multipliziert.

Auf der linken Seite verbleibt das Polynom $Q_m(x)$ und auf der rechten Seite erhalten wir ebenfalls ein Polynom.

Bei vorherigem Beispiel hätten wir

$$x^5+3x^3-7=$$

$$=A_1(x-1)^2(x+3)(x^2-2x+2)^2+A_2(x-1)(x+3)(x^2-2x+2)^2+$$

$$+A_3(x+3)(x^2-2x+2)^2+B(x-1)^3(x^2-2x+2)^2+$$

$$+(C_1x+D_1)(x-1)^3(x+3)(x^2-2x+2)+(C_2x+D_2)(x-1)^3(x+3)$$

Zwei Polynome sind genau dann identisch, wenn sie in all ihren Koeffizienten übereinstimmen.

Durch Vergleich der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x entsteht ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen in n Unbekannten welches eindeutig lösbar ist, und als Lösung die früher unbestimmten Koeffizienten ergibt.

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung ist die **Polmethode** ("Einsetzen der Nullstellen"), welche an folgendem Beispiel demonstriert werden soll.

Beispiel. $r(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

Wir erhalten $2x + 1 = A(x-2) + B(x-1)$. Diese Gleichung muss für jedes x erfüllt sein.

Für $x = 1:\quad 3 = A(-1) \ \Rightarrow\ A = -3$

Für $x = 2:\quad 5 = B$

Also $r(x) = -\frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-2}$.

Integration rationaler Funktionen

Nach erfolgter Partialbruchzerlegung können folgende Typen von Integralen auftreten:

- $I = \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \frac{1}{1-k}(x-a)^{-k+1} + C \quad , \ k \neq 1$
- $I = \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$
- $I = \int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} dx$

Durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat und nachfolgender geeigneter Substitution kann das letzte Integral (oft mit größerem Rechenaufwand) berechnet werden. Dabei treten folgende Integrale auf:

- $\int \frac{ax+b}{x^2+1} dx = \frac{a}{2}\ln(x^2+1) + b\arctan x + C$
- $\int \frac{ax+b}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)} \cdot [\frac{bx-a}{(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{(2n-3)b}{(x^2+1)^{n-1}} dx] \quad , \ n \neq 1$

Speziell etwa: $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)} \cdot [\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{2n-3}{(x^2+1)^{n-1}} dx] \quad , \ n \neq 1$

Standardsubstitutionen

Im folgenden bezeichnen R und $R_1, \ldots, R_5$ rationale Funktionen.

a) $I = \int R(e^x)dx$

Substitution: $u = e^x \quad , \quad du = e^x dx \quad , \quad dx = \frac{du}{u}$

liefert $I = \int R(u)\frac{du}{u} = \int R_1(u)du$

b) $I = \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx \quad , \; a \in \mathbb{R}$

Substitution: $x = a \sin u \quad , \quad dx = a \cos u du \quad , \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$

liefert $I = \int R(a \sin u, a \cos u) a \cos u du = \int R_2(\sin u, \cos u)du$

Weiter dann wie unter Punkt c)

c) $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$

Substitution: $u = \tan \frac{x}{2} \quad , \quad x = 2 \arctan u \quad , \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$

$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ (siehe Formelsammlung)

liefert $I = \int R(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2}{1+u^2}du = \int R_3(u)du$

d) $I = \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx \quad , \; a \in \mathbb{R}$

Substitution: $x = a \sinh u \quad , \quad dx = a \cosh u du \; , \quad \sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh u$

liefert $I = \int R(a \sinh u, a \cosh u) a \cosh u du = \int R_4(e^u)du$ mit

$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad , \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

Weiter dann wie unter Punkt a)

e) $I = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx \quad , \; a \in \mathbb{R}$

Substitution: $x = a \cosh u \quad , \quad dx = a \sinh u du \; , \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh u$

liefert $\quad I = \int R(a\cosh u, a\sinh u) a \sinh u du = \int R_5(e^u) du \quad$ mit

$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad , \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

Weiter dann wie unter Punkt a)